

DS4



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$2xy' + y = x^4 \quad (E_1)$$

2. (*) Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 6y' + 9y = (x + 1)e^x \quad (E_2)$$

3. On note E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornées.

Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{ |f(x)| \mid x \in [0, 1] \}$.

Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

4. Énoncer et démontrer le théorème d'encadrement.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la fonction définie par :

$$I_n : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)} dt$$

5. Justifier que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n(x)$ est bien définie.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $I_0(x)$ et $I_2(x)$.

b) Montrer, à l'aide du changement de variable $u = e^t$: $I_1(x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

7. a) Démontrer, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$: $\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire que la fonction I_1 est impaire.

c) Démontrer que la fonction I_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

8. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer :

$$(n+1)I_{n+2}(x) = nI_n(x) + \frac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{ch}^n(x)}$$

(On pourra remarquer, au choix : $\frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)} = \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^{n+1}(t)}$ ou $\frac{1}{\operatorname{ch}^{n+2}(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t) \operatorname{ch}^n(t)}$.)

b) En déduire les expressions de $I_3(x)$ et $I_4(x)$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on étudie la fonction I_n .

- a) Étudier la parité de la fonction I_n .
- b) Démontrer que la fonction I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et expliciter sa dérivée I'_n .
- c) Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{\text{ch}(t)} \leq 2e^{-t}$.
- d) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad I_n(x) \leq \frac{2^n}{n}(1 - e^{-nx})$$

- e) Montrer que la fonction I_n est strictement croissante et majorée sur $\mathbb{R}$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.

(l'existence de cette limite est garantie par la question **9e**).

- a) Calculer J_1 et J_2 .
- b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_{n+2} = \frac{n}{n+1} J_n$.
- c) Montrer par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad J_{2p+2} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Problème : Méthode de Héron

Dans tout ce problème, on désigne par a un nombre réel strictement positif fixé, et on considère la **suite de Héron** associée à a , i.e. la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

Partie 1 - Étude d'une fonction.

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \end{aligned}$$

- 11.** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.
- 12. a)** Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b)** L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Expliciter $f(\mathbb{R}_+^*)$.
- 13. a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer le signe de $f(x) - x$.
- b)** Expliciter les points fixes de la fonction f .
- 14. a)** Montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$, dont on donnera une équation.
- b)** Étudier la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
- 15.** Tracer l'allure du graphe de f dans le plan. On fera apparaître sur le graphique les asymptotes du graphe de f , ses éventuelles tangentes horizontales, ainsi que la première bissectrice du repère.

Partie 2 - Étude de la suite de Héron

16. Calculer u_1 et u_2 en fonction de a .
17. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$.
18. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.
19. Dédire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite $\sqrt{a}$.
20. Écrire une fonction **Python** prenant en paramètres un réel strictement positif a et un entier naturel n , et renvoyant le terme u_n de la suite de Héron associée à a .

Partie 3 - Étude de la vitesse de convergence

On cherche dans cette question à évaluer la *vitesse de convergence* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\sqrt{a}$. On considère pour cela l'**écart relatif réduit** de u_n à $\sqrt{a}$, défini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

21. a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\varepsilon_n \geq 0$ et $\varepsilon_{n+1} \leq (\varepsilon_n)^2$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n \leq (\varepsilon_1)^{2^{n-1}}$.
22. On suppose dans cette question que $a \in [1, 4]$.
a) Montrer alors : $\varepsilon_1 \leq \frac{1}{4}$
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{2^n - 2}}$.
c) En déduire que u_4, u_5 et u_6 sont alors des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ à respectivement 10^{-4} , 10^{-9} et 10^{-18} près.
(On pourra utiliser le fait que $2^{10} > 10^3$.)

Partie 4 - Étude de la suite de Héron dans le cas complexe

Le but de cette partie est de généraliser l'étude de la suite de Héron – et en particulier le résultat de convergence obtenu en partie 2 ci-dessus – au cas où a est un complexe non nul.

On suppose donc désormais que $a \in \mathbb{C}^*$. On note α et $-\alpha$ les deux racines carrées complexes de a , et on pose $i\alpha\mathbb{R} = \{i\alpha x \mid x \in \mathbb{R}\}$. On considère la suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{C} \setminus i\alpha\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On note : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On note δ une racine carrée de Δ (éventuellement complexe). Autrement dit : $\delta^2 = \Delta$.

Le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines :

$$\frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

23. Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

- a)** Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{1}{2} \left(z + \frac{a}{z} \right) = i\alpha\lambda$. Démontrer alors : $z \in i\alpha\mathbb{R}$.
- b)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si le terme u_n est bien défini et vérifie $u_n \notin i\alpha\mathbb{R}$, alors le terme u_{n+1} est bien défini et vérifie $u_{n+1} \notin i\alpha\mathbb{R}$.
- c)** Conclure.

24. Que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 = \pm\alpha$?

25. On suppose désormais que $u_0 \neq \pm\alpha$.

- a)** Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$, alors : $\ell = \pm\alpha$.
- b)** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \pm\alpha$.
- c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le complexe $z_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha}$, qui est bien défini et non nul d'après **25b**.
Démontrer : $z_{n+1} = (z_n)^2$.
En déduire une expression de z_n en fonction de n et de z_0 .
- d)** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \alpha \frac{1 + z_n}{1 - z_n} = \alpha \frac{z_n^{-1} + 1}{z_n^{-1} - 1}$.
- e)** En déduire que l'on a l'alternative suivante :

$$\begin{cases} \text{si } |u_0 - \alpha| < |u_0 + \alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \alpha. \\ \text{si } |u_0 - \alpha| > |u_0 + \alpha|, \text{ alors la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } -\alpha. \end{cases}$$

26. Interpréter géométriquement l'ensemble $i\alpha\mathbb{R}$ en fonction des points du plan d'affixe α et $-\alpha$, ainsi que les résultats de **25e**.