

DS3



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : (u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$.

► **Initialisation :**

× D'une part : $(u + v)^0 = 1$.

× D'autre part : $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} u^k v^{0-k} = \binom{0}{0} u^0 v^0 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

(i.e. $(u + v)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k v^{(n+1)-k}$).

$$\begin{aligned}
 & (u + v)^{n+1} \\
 = & (u + v) (u + v)^n \\
 = & (u + v) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
 = & u \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} + v \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} && \text{(par distributivité de } \times \text{ sur } +) \\
 = & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{k+1} v^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n+1-k} && \text{(par distributivité de } \times \text{ sur } +) \\
 = & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n+1-k} && \text{(par décalage d'indice)} \\
 = & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n+1-k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} u^k v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1} v^{n+1-(n+1)} \right) \\ &+ \left(\binom{n}{0} u^0 v^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u^k v^{n+1-k} \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{0} u^0 v^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k v^{n+1-k} + u^{n+1} v^0 \\ &= \binom{n}{0} u^0 v^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} u^k v^{n+1-k} + u^{n+1} v^0 \quad (\text{par triangle de Pascal}) \\ &= \binom{n}{0} u^0 v^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} u^k v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1} v^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k v^{n+1-k} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Finalement : $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (u+v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$

□

2. Soient E, F, G des ensembles.
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application.
 Soit $g : F \rightarrow G$ une application.
 Soient B_1 et B_2 des parties de F .

a) Démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ surjective} \\ g \text{ surjective} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ surjective}$$

Démonstration.

Supposons que f et g sont surjectives. Démontrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$.

Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.

Comme $g : F \rightarrow G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.

Comme $f : E \rightarrow F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On a alors : $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Ainsi $g \circ f$ est surjective.

Ainsi : $\left. \begin{array}{l} f \text{ surjective} \\ g \text{ surjective} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ surjective}$

□

b) Démontrer :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

Démonstration.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Alors : $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Deux cas se présentent :

× si $f(x) \in B_1$, alors : $x \in f^{-1}(B_1)$.

Or : $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. D'où : $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

× si $f(x) \notin B_1$, alors : $f(x) \in B_2$. Donc : $x \in f^{-1}(B_2)$.

Or : $f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. D'où : $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Dans tous les cas : $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Ainsi : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

($\supset$) Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Alors : $(x \in f^{-1}(B_1)) \text{ OU } x \in f^{-1}(B_2)$. Deux cas se présentent alors :

× si $x \in f^{-1}(B_1)$, alors : $f(x) \in B_1$.

Or : $B_1 \subset B_1 \cup B_2$. Donc : $f(x) \in B_1 \cup B_2$.

D'où : $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

× si $x \notin f^{-1}(B_1)$, alors : $x \in f^{-1}(B_2)$. Donc : $f(x) \in B_2$.

Or : $B_2 \subset B_1 \cup B_2$. Donc : $f(x) \in B_1 \cup B_2$.

D'où : $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Dans tous les cas : $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Ainsi : $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Finalement : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

□

3. Démontrer que la fonction h suivante est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[\\ x &\mapsto \exp(-e^{-x}) \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit $y \in]0, 1[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \exp(-e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = -e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -\ln(y) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\ln(y)) = -x \quad (\text{car, comme } y \in]0, 1[, \text{ alors : } -\ln(y) > 0)$$

$$\Leftrightarrow -\ln(-\ln(y)) = x$$

La fonction h est donc bijective de bijection réciproque :

$$h^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\ln(-\ln(x))$$

□

4. a) (*) Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)$.

Démonstration.

On remarque :

$$\begin{aligned}
 \cos^3(x) &= (\cos(x))^3 \\
 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 && \text{(par formule d'Euler)} \\
 &= \frac{1}{2^3} ((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix} (e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3) && \text{(par formule du binôme)} \\
 &= \frac{1}{2^3} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
 &= \frac{1}{2^3} (2 \cos(3x) + 3 \times 2 \cos(x)) && \text{(par formule d'Euler)} \\
 &= \frac{1}{2^2} (\cos(3x) + 3 \cos(x))
 \end{aligned}$$

$\cos^3(x) = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x)).$

□

b) (*) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \cos^3(x)$ est continue sur le **SEGMENT** $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$ est donc bien définie.

- De plus :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x)) dx && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) + 3 \cos(x) dx && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \sin(3x) + 3 \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} + 3 \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx = \frac{2}{3}.$

□

Problème 1 : Théorème de Morley

Les trisectrices d'un angle sont les droites qui découpent cet angle en trois angles égaux.

On souhaite dans cet exercice démontrer le théorème de Morley : les trisectrices d'un triangle se coupent en trois points formant un triangle équilatéral.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A , B et C trois points deux à deux distincts. On note a , b et c leurs affixes respectives.

On note également :

× α le réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ vérifiant : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 3\alpha [2\pi]$. Autrement dit, 3α est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

× β le réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ vérifiant : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv 3\beta [2\pi]$. Autrement dit, 3β est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

× γ le réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ vérifiant : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 3\gamma [2\pi]$. Autrement dit, 3γ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

On note alors :

$$u = e^{2i\alpha}, \quad v = e^{2i\beta} \quad \text{et} \quad w = e^{2i\gamma}$$

On note enfin R_a , R_b et R_c les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} R_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & R_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & R_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto u(z - a) + a & z \mapsto v(z - b) + b & z \mapsto w(z - c) + c \end{array}$$

On remarquera que :

- × la fonction R_a est la rotation d'angle 2α et de centre A ,
- × la fonction R_b est la rotation d'angle 2β et de centre B ,
- × la fonction R_c est la rotation d'angle 2γ et de centre C .

5. Calculs préliminaires.

a) (*) On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Démontrer : $1 + j = -j^2$.

Démonstration.

- D'une part :

$$\begin{aligned} 1 + j &= 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ &= e^{i0} + e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2 \times \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$j^2 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}} \right)^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3} + i\pi} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On en conclut : $1 + j = -j^2$.

□

b) Soient Z_1, Z_2 et Z_3 trois points deux à deux distincts d'affixes z_1, z_2 et z_3 vérifiant :

$$z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0$$

Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$.

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} &= \frac{(-j z_2 - j^2 z_3) - z_2}{z_3 - z_2} && (\text{car : } z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0) \\ &= \frac{-(1+j) z_2 - j^2 z_3}{z_3 - z_2} \\ &= \frac{j^2 z_2 - j^2 z_3}{z_3 - z_2} && (d'après la question précédente) \\ &= -j^2 \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_2} \\ &= -j^2 \\ &= -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 \\ &= -e^{\frac{4i\pi}{3}} \\ &= -e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Une forme exponentielle de $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ est $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

□

c) En déduire que le triangle $Z_1Z_2Z_3$ est équilatéral.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{Z_2Z_3}, \overrightarrow{Z_2Z_1}) &\equiv \arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) [2\pi] && (d'après la question précédente) \\ &\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{aligned}$$

$$(\overrightarrow{Z_2Z_3}, \overrightarrow{Z_2Z_1}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

- On procède de même pour déterminer $(\overrightarrow{Z_1 Z_2}, \overrightarrow{Z_1 Z_3})$.

× Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{z_3 - (-j z_2 - j^2 z_3)}{z_2 - (-j z_2 - j^2 z_3)} \quad (\text{car : } z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0) \\ &= \frac{j z_2 + (1 + j^2) z_3}{(1 + j) z_2 + j^2 z_3} \\ &= \frac{j z_2 - j z_3}{-j^2 z_2 + j^2 z_3} \quad (\text{d'après } \textcolor{red}{5a}) \\ &= \frac{j \cancel{(z_2 - z_3)}}{-j^2 \cancel{(z_2 - z_3)}} \\ &= -\frac{1}{j} \\ &= e^{i\pi} \times e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{Z_1 Z_2}, \overrightarrow{Z_1 Z_3}) &\equiv \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{aligned}$$

- Le triangle $Z_1 Z_2 Z_3$ vérifie donc :

× d'une part : $(\overrightarrow{Z_2 Z_3}, \overrightarrow{Z_2 Z_1}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$,

× d'autre part : $(\overrightarrow{Z_1 Z_2}, \overrightarrow{Z_1 Z_3}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Or, la somme des angles d'un triangle vaut 180° donc :

$$(\overrightarrow{Z_2 Z_3}, \overrightarrow{Z_2 Z_1}) + (\overrightarrow{Z_1 Z_2}, \overrightarrow{Z_1 Z_3}) + (\overrightarrow{Z_3 Z_1}, \overrightarrow{Z_3 Z_2}) = \pi$$

On en déduit :

$$(\overrightarrow{Z_2 Z_3}, \overrightarrow{Z_2 Z_1}) = (\overrightarrow{Z_1 Z_2}, \overrightarrow{Z_1 Z_3}) = (\overrightarrow{Z_3 Z_1}, \overrightarrow{Z_3 Z_2}) = \frac{\pi}{3}$$

Le triangle $Z_1 Z_2 Z_3$ est donc équilatéral.

□

- d)** Démontrer que uv , vw et wu sont différents de 1 et : $uvw = j$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$uv = e^{2i\alpha} e^{2i\beta} = e^{2i(\alpha+\beta)}$$

Ainsi :

$$uv = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]$$

Or : $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$. Ainsi :

$$0 < \alpha + \beta < \frac{2\pi}{3} < 2\pi$$

D'où : $\alpha + \beta \not\equiv 0 [2\pi]$.

Ainsi : $uv \neq 1$. On démontre avec des raisonnements similaires :
 $vw \neq 1$ et $wu \neq 1$.

- Ensuite :

$$uvw = e^{2i\alpha} e^{2i\beta} e^{2i\gamma} = e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Or, d'après l'énoncé, 3α est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, 3β est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et 3γ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

De plus, la somme des angles d'un triangle vaut 180° . Autrement dit :

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi$$

$$\text{Ainsi : } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

On en déduit : $uvw = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$.

□

e) (*) Mettre sous forme exponentielle les deux nombres complexes $\frac{u(1-v)}{1-uv}$ et $\frac{1-u}{1-uv}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{u(1-v)}{1-uv} &= \frac{e^{2i\alpha} (1 - e^{2i\beta})}{1 - e^{2i\alpha} e^{2i\beta}} \\ &= e^{2i\alpha} \frac{e^{i\beta} (e^{-i\beta} - e^{i\beta})}{1 - e^{2i(\alpha+\beta)}} \\ &= e^{i(2\alpha+\beta)} \frac{-2i \sin(\beta)}{e^{i(\alpha+\beta)} (e^{-i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha+\beta)})} \quad (\text{par formule d'Euler}) \\ &= e^{i\alpha} \frac{\cancel{-2i} \sin(\beta)}{\cancel{-2i} \sin(\alpha+\beta)} \quad (\text{par formule d'Euler}) \end{aligned}$$

Enfin, comme $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{3}[$, alors : $\alpha + \beta \in]0, \frac{2\pi}{3}[$. Ainsi :

$$\sin(\beta) > 0 \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + \beta) > 0$$

On en déduit : $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} > 0$.

Une forme exponentielle de $\frac{u(1-v)}{1-uv}$ est donc : $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} e^{i\alpha}$.

- De même :

$$\begin{aligned} \frac{1-u}{1-uv} &= \frac{1 - e^{2i\alpha}}{e^{i(\alpha+\beta)} \times (-2i) \sin(\alpha + \beta)} \quad (\text{d'après ce qui précède}) \\ &= \frac{e^{i\alpha} (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha})}{e^{i(\alpha+\beta)} \times (-2i) \sin(\alpha + \beta)} \\ &= e^{-i\beta} \frac{\cancel{-2i} \sin(\alpha)}{\cancel{-2i} \sin(\alpha + \beta)} \quad (\text{par formule d'Euler}) \end{aligned}$$

Enfin :

$$\sin(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + \beta) > 0$$

On en déduit : $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} > 0$.

Une forme exponentielle de $\frac{1-u}{1-uv}$ est donc : $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} e^{-i\beta}$.

□

6. On considère trois nombres complexes p, q et r vérifiant les relations suivantes :

(i) $(1-v)b + v(1-w)c = p(1-vw)$

(ii) $(1-w)c + w(1-u)a = q(1-wu)$

(iii) $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$

On note : $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2r)$.

a) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ que l'on explicitera tels que : $E = \lambda a + \mu b + \nu c$.

Vérifier en particulier :

$$\lambda = j(1-u)(1-vw)[w(1-uv) + j(1-wu)]$$

Démonstration.

• On remarque :

$$\begin{aligned} E &= (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2r) \\ &= (1-uv)(1-wu)(1-vw)p \\ &\quad + j(1-uv)(1-vw)(1-wu)q \\ &\quad + j^2(1-vw)(1-wu)(1-uv)r \\ &= (1-uv)(1-wu)((1-v)b + v(1-w)c) \\ &\quad + j(1-uv)(1-vw)((1-w)c + w(1-u)a) \\ &\quad + j^2(1-vw)(1-wu)((1-u)a + u(1-v)b) \quad (d'après (i), (ii) et (iii)) \\ &= (jw(1-u)(1-uv)(1-vw) + j^2(1-u)(1-vw)(1-wu))a \\ &\quad + ((1-v)(1-uv)(1-wu) + j^2u(1-v)(1-vw)(1-wu))b \\ &\quad + (v(1-w)(1-uv)(1-wu) + j(1-w)(1-uv)(1-vw))c \end{aligned}$$

• On note alors :

$$\lambda = j(1-u)(1-vw)(w(1-uv) + j(1-wu))$$

$$\mu = (1-v)(1-wu)((1-uv) + j^2u(1-vw))$$

$$\nu = (1-w)(1-uv)(v(1-wu) + j(1-vw))$$

On obtient bien : $E = \lambda a + \mu b + \nu c$.

□

b) À l'aide de la question **5d**, démontrer :

$$\lambda = \frac{w}{u} j^2 (1-u)(j^2 u - 1)(1 - ju)$$

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \lambda &= j(1-u)(1-vw)(w(1-uv) + j(1-wu)) \\ &= j(1-u)(1-vw)(w(1-uv) + uvw(1-wu)) \quad (\text{car, d'après } \mathbf{5d} : uvw = j) \\ &= w(1-u) \times j(1-vw)((1-uv) + uv(1-wu)) \\ &= w(1-u) \times j(1-vw)(1 - \cancel{uv} + \cancel{uv} - uvw \times u) \\ &= w(1-u) \times j \left(1 - \frac{uvw}{u}\right) (1 - ju) \quad (\text{car, d'après } \mathbf{5d} : uvw = j) \\ &= w(1-u)(1 - ju) \times j \left(1 - \frac{j}{u}\right) \quad (\text{car, d'après } \mathbf{5d} : uvw = j) \\ &= \frac{w}{u} (1-u)(1 - ju) \times j(u - j) \\ &= \frac{w}{u} j^2 (1-u)(1 - ju) \times \frac{1}{j} (u - j) \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3} + 2i\pi} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{w}{u} j^2 (1-u)(1 - ju) \times \frac{1}{j} (u - j) \\ &= \frac{w}{u} j^2 (1-u)(1 - ju) \times j^2 (u - j) \\ &= \frac{w}{u} j^2 (1-u)(1 - ju)(j^2 u - j^3) \\ &= \frac{w}{u} j^2 (1-u)(1 - ju)(j^2 u - 1) \quad (\text{car} : j^3 = 1) \end{aligned}$$

Finalement : $\lambda = \frac{w}{u} j^2 (1-u)(j^2 u - 1)(1 - ju)$.

□

c) Démontrer finalement : $\lambda = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1)$. On **admet** qu'on obtient de même : $\mu = \frac{u}{v} (v^3 - 1)$ et $\nu = \frac{v}{w} j (w^3 - 1)$ et donc :

$$E = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v} (v^3 - 1) b + \frac{v}{w} j (w^3 - 1) c$$

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$\lambda = \frac{w}{u} j^2 (1-u)(j^2 u - 1)(1 - ju)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{w}{u} j^2 (1-u) \times (j^2 u - j^3 u^2 - 1 + ju) \\
 &= \frac{w}{u} j^2 (1-u)(j^2 u - u^2 - 1 + ju) && (\text{car} : j^3 = 1) \\
 &= \frac{w}{u} j^2 \times (j^2 u - u^2 - 1 + ju - j^2 u^2 + u^3 + u - ju^2) \\
 &= \frac{w}{u} j^2 (u^3 - (1+j+j^2)u^2 + (1+j+j^2)u - 1) \\
 &= \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1) && (\text{car, d'après } \mathbf{5a} : 1+j+j^2=0)
 \end{aligned}$$

Finalement : $\lambda = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1)$.

□

7. a) Expliciter la fonction $R_a \circ R_b$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 R_a \circ R_b(z) &= R_a(R_b(z)) \\
 &= u(R_b(z) - a) + a \\
 &= u(v(z - b) + b - a) + a \\
 &= uv(z - b) + u(b - a) + a
 \end{aligned}$$

$R_a \circ R_b : z \mapsto uv(z - b) + u(b - a) + a$

□

b) Montrer que la fonction $R_a \circ R_b$ admet un unique point fixe, noté r , vérifiant :

$$(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$$

On note alors R le point d'axe r .

On rappelle que, pour toute fonction $f : E \rightarrow E$, un point fixe de f est un élément x de E vérifiant : $f(x) = x$.

Démonstration.

• Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 R_a \circ R_b(z) = z &\Leftrightarrow uv(z - b) + u(b - a) + a = z && (\text{d'après la question précédente}) \\
 &\Leftrightarrow (uv - 1)z = buvu(a - b) - a \\
 &\Leftrightarrow z = \frac{buv + u(a - b) - a}{uv - 1} && (\text{car, d'après } \mathbf{5d} : uv \neq 1)
 \end{aligned}$$

La fonction $R_a \circ R_b$ admet donc un unique point fixe : $r = \frac{buv + u(a - b) - a}{uv - 1}$.

- On remarque :

$$\begin{aligned}
 (1-uv)r &= (1-uv) \frac{buv + u(a-b) - a}{uv-1} \\
 &= -(buv + u(a-b) - a) \\
 &= -buv - ua + bu + a \\
 &= (1-u)a + b(1-v)u
 \end{aligned}$$

$$(1-uv)r = (1-u)a + b(1-v)u$$

□

- c) En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$.

On **admet** qu'on obtient avec un raisonnement similaire que l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$ vaut $-\beta$.

Démonstration.

- Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ est : $\arg\left(\frac{r-a}{b-a}\right)$. On cherche donc à faire apparaître le quotient $\frac{r-a}{b-a}$ grâce à la relation de la question précédente :

$$(1-uv)r = (1-u)a + b(1-v)u$$

- On commence par soustraire $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente (comme suggéré par l'énoncé) :

$$\begin{aligned}
 (1-uv)r - (1-uv)a &= (1-u)a + b(1-v)u - (1-uv)a \\
 &= ((\textcolor{red}{r}-u) - (\textcolor{red}{r}-uv))a + b(1-v)u \\
 &= -u(1-v)a + b(1-v)u \\
 &= u(1-v)(b-a)
 \end{aligned}$$

Donc : $(1-uv)(r-a) = u(1-v)(b-a)$. Ainsi, comme $b \neq a$ et $uv \neq 1$, alors :

$$\frac{r-a}{b-a} = \frac{u(1-v)}{1-uv}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR}) &\equiv \arg\left(\frac{r-a}{b-a}\right) & [2\pi] \\
 &\equiv \arg\left(\frac{u(1-v)}{1-uv}\right) & [2\pi] \\
 &\equiv \arg\left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} e^{i\alpha}\right) & [2\pi] \quad (d'après \textcolor{red}{5e}) \\
 &\equiv \arg\left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right) + \arg(e^{i\alpha}) & [2\pi] \\
 &\equiv 0 + \alpha & [2\pi] \quad (car : \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} > 0)
 \end{aligned}$$

Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ est donc α .

□

d) Démontrer que R est bien le point placé sur la figure ci-dessous.

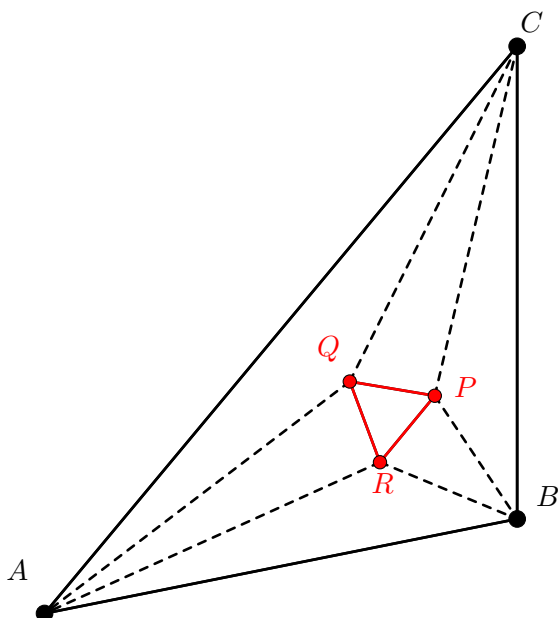
On définit de même le point P d'affixe p et le point Q d'affixe q vérifiant : $R_b \circ R_c(p) = p$ et $R_c \circ R_a(q) = q$. On les place également sur la figure ci-dessous.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ est α . C'est donc le tiers de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Le point R est donc situé sur la première trisectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Ensuite, toujours d'après la question précédente, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$ est $-\beta$. C'est donc le tiers de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
Le point R est donc situé sur la première trisectrice de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
- Finalement, le point R est l'intersection entre la première trisectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et la première trisectrice de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Le point R est donc bien placé sur la figure.

□



8. a) On note : $R_c^3 = R_c \circ R_c \circ R_c$.

Démontrer que le point d'affixe $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) .

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction R_c est la rotation de centre C et d'angle 2γ .
La fonction R_c^3 est donc la rotation de centre C et de rayon 6γ .

Le point A' d'affixe $R_c^3(a)$ est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle 6γ .

- De plus, toujours d'après l'énoncé : $6\gamma = 2 \cdot (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Ainsi : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = 2 \cdot (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
D'où :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}) = 2 \cdot (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

On obtient :

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

- Pour démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) , il reste donc à démontrer : $CA = CA'$.
Mais comme A' est l'image de A par une rotation de centre C , on a bien : $CA = CA'$.

Finalelement, le point d'affixe $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) . $\square$

- b) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ que l'on explicitera tel que :

$$R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 : z \mapsto \lambda z + \mu$$

Démonstration.

- Trouvons d'abord une expression de R_a^3 .
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} R_a^2(z) &= R_a(R_a(z)) \\ &= u(R_a(z) - a) + a \\ &= u(u(z - a) + \alpha - \alpha) + a \\ &= u^2(z - a) + a \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} R_a^3(z) &= R_a(R_a^2(z)) \\ &= u(R_a^2(z) - a) + a && (d'après l'énoncé) \\ &= u(u^2(z - a) + \alpha - \alpha) + a \\ &= u^3(z - a) + a \end{aligned}$$

Ainsi $R_a^3 : z \mapsto u^3(z - a) + a$.

- De même, on trouve :

$$\begin{aligned} R_b^3 &: z \mapsto v^3(z - b) + b \\ R_c^3 &: z \mapsto w^3(z - c) + c \end{aligned}$$

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} (R_b^3 \circ R_c^3)(z) &= R_b^3(R_c^3(z)) \\ &= v^3(R_c^3(z) - b) + b \\ &= v^3(w^3(z - c) + c - b) + b \\ &= v^3 w^3 z + v^3(1 - w^3)c + (1 - v^3)b \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(z) &= R_a^3((R_b^3 \circ R_c^3)(z)) \\ &= u^3((R_b^3 \circ R_c^3)(z) - a) + a \\ &= u^3(v^3 w^3 z + v^3(1 - w^3)c + (1 - v^3)b - a) + a \\ &= u^3 v^3 w^3 z + u^3 v^3(1 - w^3)c + u^3(1 - v^3)b + (1 - u^3)a \end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
 u^3 v^3 w^3 &= (e^{2i\alpha})^3 (e^{2i\beta})^3 (e^{2i\gamma})^3 \\
 &= e^{6i\alpha} e^{6i\beta} e^{6i\gamma} \\
 &= e^{6i(\alpha+\beta+\gamma)} \\
 &= e^{2i \times (3\alpha+3\beta+3\gamma)} \\
 &= e^{2i \times \pi}
 \end{aligned}$$

En effet, comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° :

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$$

Ainsi : $u^3 v^3 w^3 = e^{2i\pi} = 1$.

- On note enfin :

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = u^3 v^3 (1 - w^3)c + u^3 (1 - v^3)b + (1 - u^3)a$$

Alors :

$$(R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(z) = \lambda z + \mu$$

Il existe bien $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ tel que : $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 : z \mapsto \lambda z + \mu$.

□

- c) Démontrer que a est un point fixe de $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$. Que peut-on en déduire ?

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question **8a**, le point A' d'abscisse $a' = R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) .
- Ensuite, on procède comme en question **8a**, pour trouver quel est l'image A'' du point d'abscisse $R_b^3(a') = (R_b^3 \circ R_c^3)(a)$.

× D'après l'énoncé, la fonction R_b est la rotation de centre B et de rayon 2β .

La fonction R_b^3 est donc la rotation de centre B et de rayon 6β .

Le point A'' d'abscisse $R_b^3(a')$ est l'image de A' par la rotation de centre B et d'angle 6β .

- × De plus, toujours d'après l'énoncé : $6\beta = 2 \cdot (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Ainsi : $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA''}) = 2 \cdot (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

D'où :

$$(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA''}) = 2 \cdot (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

Or, d'après **8a**, le point A' est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) . Ainsi : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC})$. Donc :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA''}) = 2 \cdot (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

On obtient :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA''}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

- × De plus comme A'' est l'image de A' par une rotation de centre B , alors : $BA'' = BA'$.
Or, comme A' est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) : $BA' = BA$. D'où :

$$BA'' = BA' = BA$$

Finalement :

- d'une part : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA''}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$
- d'autre part : $BA'' = BA$.

Le point A'' d'axe $R_b^3(a') = (R_b^3 \circ R_c^3)(a)$ est donc le symétrique de A' par rapport à la droite (BC) . On en déduit que A'' est le point A .

Le point d'axe $(R_b^3 \circ R_c^3)(a)$ est le point A .

- Enfin, comme R_a^3 est une rotation de centre A , alors l'image de A par cette rotation est A . Ainsi, le point d'axe $R_a^3((R_b^3 \circ R_c^3)(a)) = (R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(a)$ est A . Autrement dit :

$$(R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(a) = a$$

On en déduit que a est un point fixe de $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$.

- On sait donc : $(R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(a) = a$.
Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lambda a + \mu = a$$

$$\text{donc } a + \mu = a \quad (\text{car, d'après la question précédente : } \lambda = 1)$$

$$\text{d'où } \mu = 0$$

On obtient :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(z) = z$$

Autrement dit : $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 = \text{id}_{\mathbb{C}}$.

□

d) Soit $z \in \mathbb{C}$. En développant l'expression $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$, démontrer :

$$(1 - u^3)a + u^3(1 - v^3)b + u^3v^3(1 - w^3)c = 0$$

Démonstration.

D'après la question **8b** :

$$\mu = u^3v^3(1 - w^3)c + u^3(1 - v^3)b + (1 - u^3)a$$

De plus, d'après la question précédente :

$$\mu = 0$$

Ainsi : $(1 - u^3)a + u^3(1 - v^3)b + u^3v^3(1 - w^3)c = 0$.

□

- e) On rappelle : $j = uvw$. Démontrer alors que le complexe E définit en question **6**, et dont on peut trouver une expression en **6c**, vérifie : $E = 0$.

Démonstration.

- D'après la question **6c** :

$$\begin{aligned} E &= \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v} (v^3 - 1) b + \frac{v}{w} j (w^3 - 1) c \\ &= \frac{w}{u} (uvw)^2 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v} (v^3 - 1) b + \frac{v}{w} uvw (w^3 - 1) c \quad (\text{car } j = uvw) \\ &= uv^2 w^3 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v} (v^3 - 1) b + uv^2 (w^3 - 1) c \end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente :

$$(1 - u^3) a + u^3 (1 - v^3) b + u^3 v^3 (1 - w^3) c = 0$$

Ainsi :

$$\frac{1}{u^2 v} ((1 - u^3) a + u^3 (1 - v^3) b + u^3 v^3 (1 - w^3) c) = 0$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{u^2 v} (1 - u^3) a + \frac{u}{v} (1 - v^3) b + u v^2 (1 - w^3) c = 0$$

- Il reste donc à démontrer : $\frac{1}{u^2 v} = uv^2 w^3$. Or :

$$\frac{1}{u^2 v} = uv^2 w^3 \Leftrightarrow 1 = u^3 v^3 w^3$$

Cette dernière égalité est vraie car :

$$u^3 v^3 w^3 = (uvw)^3 = j^3 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^3 = e^{2i\pi} = 1$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} E &= uv^2 w^3 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v} (v^3 - 1) b + uv^2 (w^3 - 1) c \\ &= \frac{1}{u^2 v} (1 - u^3) a + \frac{u}{v} (1 - v^3) b + u v^2 (1 - w^3) c \\ &= 0 \end{aligned}$$

$E = 0$

□

- f) Conclure que PQR est un triangle équilatéral.

Démonstration.

- On rappelle, par définition donnée en question **6** :

$$E = (1 - uv)(1 - vw)(1 - wu)(p + jq + j^2 r)$$

Or, d'après la question précédente : $E = 0$. Ainsi :

$$(1 - uv)(1 - vw)(1 - wu)(p + jq + j^2 r) = 0$$

- De plus, d'après la question **5d** :

$$uv \neq 1, \quad vw \neq 1 \quad \text{et} \quad wu \neq 1$$

On en déduit :

$$p + jq + j^2r = 0$$

- On applique alors les questions **5b** et **5c** aux points $Z_1 = P$, $Z_2 = Q$ et $Z_3 = R$.

On en conclut que le triangle PQR est équilatéral.

□

Problème 2

On note : $f = \tan$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$. Autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} f & : &] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

9. (*) Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

On note $\arctan = f^{-1}$.

Démonstration.

La fonction f est :

× continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$,

× strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Elle réalise donc une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur $f(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [)$ où :

$$f(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [) = \left] \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right[=] -\infty, +\infty [$$

La fonction f réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur $J = \mathbb{R}$.

□

10. Quelle est la monotonie de $\arctan$ sur J ? Justifier.

Démonstration.

Par théorème de la bijection, la fonction $\arctan$ est de même monotonie sur $\mathbb{R}$ que la fonction f sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

La fonction $\arctan$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

□

11. Démontrer que la fonction $\arctan$ est impaire.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$. Donc $y = \arctan(-x)$ est bien défini.

• La fonction $\tan$ est impaire. Ainsi :

$$\tan(-y) = -\tan(y)$$

On en déduit :

$$\tan(-\arctan(-x)) = -\tan(\arctan(-x))$$

• Or, comme $\arctan$ est la bijection réciproque de f :

$$\tan(\arctan(-x)) = -x$$

On en déduit : $\tan(-\arctan(-x)) = -(-x) = x$.

• On compose cette dernière égalité par $\arctan$. On obtient :

$$\arctan(\tan(-\arctan(-x))) = \arctan(x)$$

||

$$-\arctan(-x) \qquad \qquad \qquad (\text{car } -\arctan(-x) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [)$$

D'où : $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

La fonction $\arctan$ est donc impaire.

□

12. Démontrer que la fonction $\arctan$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration.

- La fonction f :
 - × est bijective de l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $\mathbb{R}$, d'après **9**,
 - × est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
 - × vérifie : $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\overrightarrow{f}'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$.
- La fonction f^{-1} est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{f'(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\tan(\arcsin(x)) \right)^2} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

□

13. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

- La fonction $h : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ de :
 - × $h_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui :
 - est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
 - vérifie : $h_1(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$,
 - × $h_2 = \arctan$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après la question précédente.

La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \arctan'(x) + h'(x) \\
 &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \quad (d'après la question précédente) \\
 &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\
 &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.

- Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \lambda$$

Enfin, d'après la question **9** :

× d'une part, comme : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

× d'autre part, comme : $\tan(0) = 0$, alors : $\arctan(0) = 0$.

En particulier, comme la fonction $\arctan$ est continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x) = \arctan(0) = 0$.

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda$. Ainsi, la fonction g est constante égale $\frac{\pi}{2}$.

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

□