

DS3 /62



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours /13

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

- 1 pt : initialisation
- 3 pts : hérédité

2. Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

Soient B_1 et B_2 des parties de F .

a) Démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ surjective} \\ g \text{ surjective} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ surjective}$$

- 1 pt

b) Démontrer :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

- 2 pts : 1 pt par inclusion

3. Démontrer que la fonction h suivante est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[\\ x &\mapsto \exp(-e^{-x}) \end{aligned}$$

- 1 pt : comme $y \in]0, 1[$, alors : $-\ln(y) > 0$
- 1 pt : reste du calcul pour trouver que la fonction h est donc bijective de bijection réciproque :

$$\begin{aligned} h^{-1} &:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\ln(-\ln(x)) \end{aligned}$$

4. a) (*) Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)$.

- 2 pts : $\cos^3(x) = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x))$ (dont 1 pt pour l'utilisation de la formule du binôme)

b) (*) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$.

- 1 pt : La fonction $x \mapsto \cos^3(x)$ est continue sur le SEGMENT $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$ est donc bien définie.

- 1 pt :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx = \frac{2}{3}$$

Problème 1 : Théorème de Morley /40

5. Calculs préliminaires.

a) (*) On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Démontrer : $1 + j = -j^2$.

• 1 pt

b) Soient Z_1, Z_2 et Z_3 trois points deux à deux distincts d'affixes z_1, z_2 et z_3 vérifiant :

$$z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0$$

Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$.

• 1 pt : utilisation de $z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0$

• 1 pt : Une forme exponentielle de $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$ est $e^{i \frac{\pi}{3}}$

c) En déduire que le triangle $Z_1 Z_2 Z_3$ est équilatéral.

• 1 pt : $(\overrightarrow{Z_2 Z_3}, \overrightarrow{Z_2 Z_1}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• 1 pt : $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{j}$ donc $(\overrightarrow{Z_1 Z_2}, \overrightarrow{Z_1 Z_3}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• 1 pt : la somme des angles d'un triangle vaut 180° .

d) Démontrer que uv, vw et wu sont différents de 1 et : $uvw = j$.

• 2 pts : $uv \neq 1$

× 1 pt : $uv = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]$

× 1 pt : $0 < \alpha + \beta < \frac{2\pi}{3} < 2\pi$

• 1 pt : comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° , alors : $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi$.

Donc : $uvw = j$

e) (*) Mettre sous forme exponentielle les deux nombres complexes $\frac{u(1-v)}{1-uv}$ et $\frac{1-u}{1-uv}$.

• 1 pt : $\frac{u(1-v)}{1-uv} = e^{i\alpha} \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

• 1 pt : $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} > 0$

• 1 pt : $\frac{1-u}{1-uv} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} e^{-i\beta}$

6. On considère trois nombres complexes p, q et r vérifiant les relations suivantes :

(i) $(1-v)b + v(1-w)c = p(1-vw)$

(ii) $(1-w)c + w(1-u)a = q(1-wu)$

(iii) $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$

On note : $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2 r)$.

a) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ que l'on explicitera tels que : $E = \lambda a + \mu b + \nu c$.

Vérifier en particulier :

$$\lambda = j(1-u)(1-vw)[w(1-uv) + j(1-wu)]$$

- 1 pt : utilisation de (i), (ii) et (iii) pour trouver :

$$\begin{aligned} E &= (1-uv)(1-wu)((1-v)b + v(1-w)c) \\ &+ j(1-uv)(1-vw)((1-w)c + w(1-u)a) \\ &+ j^2(1-vw)(1-wu)((1-u)a + u(1-v)b) \end{aligned}$$

- 1 pt : On obtient le résultat avec :

$$\begin{aligned} \lambda &= j(1-u)(1-vw)(w(1-uv) + j(1-wu)) \\ \mu &= (1-v)(1-wu)((1-uv) + j^2u(1-vw)) \\ \nu &= (1-w)(1-uv)(v(1-wu) + j(1-vw)) \end{aligned}$$

b) À l'aide de la question **5d**, démontrer :

$$\lambda = \frac{w}{u} j^2 (1-u)(j^2u-1)(1-ju)$$

- 1 pt : comme $uvw = 1$, alors : $\lambda = \frac{w}{u} j^2 (1-u)(1-ju) \times \frac{1}{j} (u-j)$

- 1 pt : $\frac{1}{j} = j^2$ et $j^3 = 1$, ce qui permet de conclure.

c) Démontrer finalement : $\lambda = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1)$. On **admet** qu'on obtient de même : $\mu = \frac{u}{v} (v^3 - 1)$ et $\nu = \frac{v}{w} j (w^3 - 1)$ et donc :

$$E = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v} (v^3 - 1) b + \frac{v}{w} j (w^3 - 1) c$$

- 1 pt : utilisation de $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

7. a) Expliciter la fonction $R_a \circ R_b$.

- 1 pt : $R_a \circ R_b : z \mapsto uv(z-b) + u(b-a) + a$

b) Montrer que la fonction $R_a \circ R_b$ admet un unique point fixe, noté r , vérifiant :

$$(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$$

On note alors R le point d'axe r .

On rappelle que, pour toute fonction $f : E \rightarrow E$, un point fixe de f est un élément x de E vérifiant : $f(x) = x$.

- 1 pt : $uv \neq 1$

- 1 pt : La fonction $R_a \circ R_b$ admet donc un unique point fixe : $r = \frac{buv + u(a-b) - a}{uv - 1}$

- 1 pt : $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$

c) En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$.

On **admet** qu'on obtient avec un raisonnement similaire que l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$ vaut $-\beta$.

- 1 pt : $\frac{r-a}{b-a} = \frac{u(1-v)}{1-uv}$

- 1 pt : utilisation de **5d** pour conclure qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ est donc α

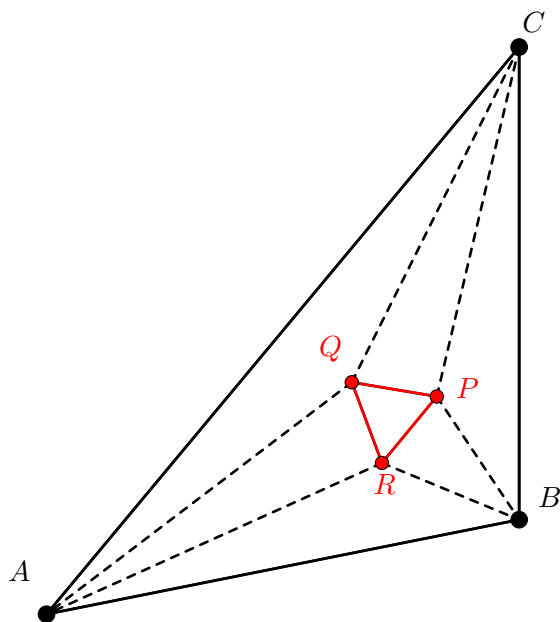
d) Démontrer que R est bien le point placé sur la figure ci-dessous.

On définit de même le point P d'affixe p et le point Q d'affixe q vérifiant : $R_b \circ R_c(p) = p$ et $R_c \circ R_a(q) = q$. On les place également sur la figure ci-dessous.

- 1 pt : Tout d'abord, d'après la question précédente, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$ est α . C'est donc le tiers de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Le point R est donc situé sur la première trisectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- 1 pt : le point R est l'intersection entre la première trisectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et la première trisectrice de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.



8. a) On note : $R_c^3 = R_c \circ R_c \circ R_c$.

Démontrer que le point d'affixe $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) .

- 1 pt : Le point A' d'affixe $R_c^3(a)$ est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle 6γ .
- 1 pt : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
- 1 pt : $CA = CA'$

b) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ que l'on explicitera tel que :

$$R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 : z \mapsto \lambda z + \mu$$

- 1 pt : $R_a^3 : z \mapsto u^3(z - a) + a$
- 1 pt : $(R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(z) = u^3v^3w^3z + u^3v^3(1 - w^3)c + u^3(1 - v^3)b + (1 - u^3)a$
- 1 pt : on note :

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = u^3v^3(1 - w^3)c + u^3(1 - v^3)b + (1 - u^3)a$$

c) Démontrer que a est un point fixe de $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$. Que peut-on en déduire ?

- 2 pts : Le point d'affixe $(R_b^3 \circ R_c^3)(a)$ est le point A .
 × 1 pt : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA''}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$
 × 1 pt : $BA'' = BA$. Le point A'' d'affixe $R_b^3(a') = (R_b^3 \circ R_c^3)(a)$ est donc le symétrique de A' par rapport à la droite (BC) . On en déduit que A'' est le point A .

- **1 pt : comme R_a^3 est une rotation de centre A , alors l'image de A par cette rotation est A . Ainsi, le point d'affixe $R_a^3((R_b^3 \circ R_c^3)(a)) = (R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(a)$ est A . Autrement dit :**

$$(R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3)(a) = a$$

- **1 pt : $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 = \text{id}_{\mathbb{C}}$**

d) Soit $z \in \mathbb{C}$. En développant l'expression $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$, démontrer :

$$(1 - u^3)a + u^3(1 - v^3)b + u^3v^3(1 - w^3)c = 0$$

- **1 pt**

e) On rappelle : $j = uvw$. Démontrer alors que le complexe E définit en question **6**, et dont on peut trouver une expression en **6c**, vérifie : $E = 0$.

- **1 pt : $E = uv^2w^3(u^3 - 1)a + \frac{u}{v}(v^3 - 1)b + uv^2(w^3 - 1)c$**

- **1 pt : $uv^2w^3(u^3 - 1)a + \frac{u}{v}(v^3 - 1)b + uv^2(w^3 - 1)c = \frac{1}{u^2v}((1 - u^3)a + u^3(1 - v^3)b + u^3v^3(1 - w^3)c) = 0$**

f) Conclure que PQR est un triangle équilatéral.

- **1 pt : par définition de E et d'après **5d** : $p + jq + j^2r = 0$**
- **1 pt : utilisation questions **5b** et **5c****

Problème 2 /9

On note : $f = \tan \mid]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} f & : & \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \tan(x) \end{array}$$

9. (*) Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

On note $\arctan = f^{-1}$.

- **1 pt : théorème de la bijection**

10. Quelle est la monotonie de $\arctan$ sur J ? Justifier.

- **1 pt : La fonction $\arctan$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$**

11. Démontrer que la fonction $\arctan$ est impaire.

- **1 pt : $\tan$ impaire donc $\tan(-\arctan(-x)) = -\tan(\arctan(-x)) = -(-x) = x$**
- **1 pt : composition par $\arctan$**

12. Démontrer que la fonction $\arctan$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- **1 pt : hypothèses théorème de dérivabilité de la réciproque**

- **1 pt : $\arctan'(x) = \frac{1}{f'(\arctan(x))} = \dots = \frac{1}{1+x^2}$**

13. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

- **1 pt** : $g : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ dérivable sur $\mathbb{R}$
- **1 pt** : $g' : x \mapsto 0$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$
- **1 pt** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ et conclusion