

DS3



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

2. Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

Soient B_1 et B_2 des parties de F .

a) Démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ surjective} \\ g \text{ surjective} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ surjective}$$

b) Démontrer :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

3. Démontrer que la fonction h suivante est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[\\ x &\mapsto \exp(-e^{-x}) \end{aligned}$$

4. a) (*) Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)$.

b) (*) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$.

Problème 1 : Théorème de Morley

Les trisectrices d'un angle sont les droites qui découpent cet angle en trois angles égaux.

On souhaite dans cet exercice démontrer le théorème de Morley : les trisectrices d'un triangle se coupent en trois points formant un triangle équilatéral.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts. On note a, b et c leurs affixes respectives.

On note également :

× α le réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ vérifiant : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 3\alpha [2\pi]$. Autrement dit, 3α est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

× β le réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ vérifiant : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv 3\beta [2\pi]$. Autrement dit, 3β est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

× γ le réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ vérifiant : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 3\gamma [2\pi]$. Autrement dit, 3γ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

On note alors :

$$u = e^{2i\alpha}, \quad v = e^{2i\beta} \quad \text{et} \quad w = e^{2i\gamma}$$

On note enfin R_a , R_b et R_c les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} R_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & R_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} & R_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto u(z-a) + a & z \mapsto v(z-b) + b & z \mapsto w(z-c) + c \end{array}$$

On remarquera que :

- × la fonction R_a est la rotation d'angle 2α et de centre A ,
- × la fonction R_b est la rotation d'angle 2β et de centre B ,
- × la fonction R_c est la rotation d'angle 2γ et de centre C .

5. Calculs préliminaires.

a) (*) On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Démontrer : $1 + j = -j^2$.

b) Soient Z_1 , Z_2 et Z_3 trois points deux à deux distincts d'affixes z_1 , z_2 et z_3 vérifiant :

$$z_1 + j z_2 + j^2 z_3 = 0$$

Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$.

c) En déduire que le triangle $Z_1Z_2Z_3$ est équilatéral.

d) Démontrer que uv , vw et wu sont différents de 1 et : $uvw = j$.

e) (*) Mettre sous forme exponentielle les deux nombres complexes $\frac{u(1-v)}{1-uv}$ et $\frac{1-u}{1-uv}$.

6. On considère trois nombres complexes p , q et r vérifiant les relations suivantes :

- (i)** $(1-v)b + v(1-w)c = p(1-vw)$
- (ii)** $(1-w)c + w(1-u)a = q(1-wu)$
- (iii)** $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$

On note : $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2r)$.

a) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ que l'on explicitera tels que : $E = \lambda a + \mu b + \nu c$.
Vérifier en particulier :

$$\lambda = j(1-u)(1-vw)[w(1-uv) + j(1-wu)]$$

b) À l'aide de la question **5d**, démontrer :

$$\lambda = \frac{w}{u} j^2 (1-u)(j^2 u - 1)(1 - ju)$$

c) Démontrer finalement : $\lambda = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1)$. On **admet** qu'on obtient de même : $\mu = \frac{u}{v} (v^3 - 1)$
et $\nu = \frac{v}{w} j (w^3 - 1)$ et donc :

$$E = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v} (v^3 - 1) b + \frac{v}{w} j (w^3 - 1) c$$

7. a) Expliciter la fonction $R_a \circ R_b$.

b) Montrer que la fonction $R_a \circ R_b$ admet un unique point fixe, noté r , vérifiant :

$$(1 - u)a + u(1 - v)b = r(1 - uv)$$

On note alors R le point d'axe r .

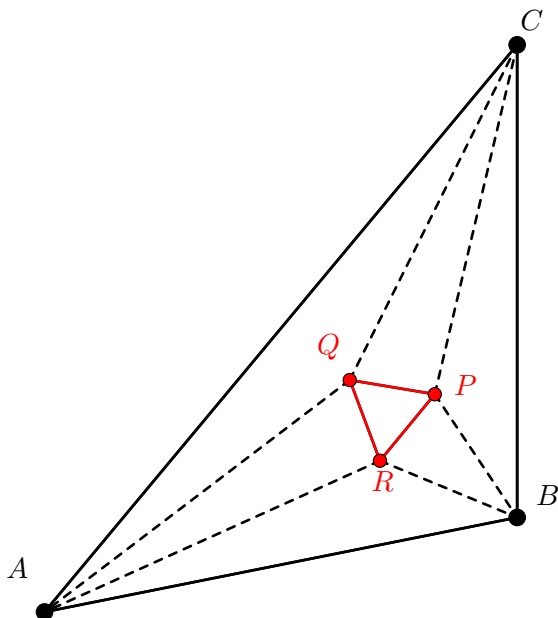
On rappelle que, pour toute fonction $f : E \rightarrow E$, un point fixe de f est un élément x de E vérifiant : $f(x) = x$.

c) En soustrayant $(1 - uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$.

On **admet** qu'on obtient avec un raisonnement similaire que l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$ vaut $-\beta$.

d) Démontrer que R est bien le point placé sur la figure ci-dessous.

On définit de même le point P d'axe p et le point Q d'axe q vérifiant : $R_b \circ R_c(p) = p$ et $R_c \circ R_a(q) = q$. On les place également sur la figure ci-dessous.



8. a) On note : $R_c^3 = R_c \circ R_c \circ R_c$.

Démontrer que le point d'axe $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) .

b) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ que l'on explicitera tel que :

$$R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3 : z \mapsto \lambda z + \mu$$

c) Démontrer que a est un point fixe de $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$. Que peut-on en déduire ?

d) Soit $z \in \mathbb{C}$. En développant l'expression $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$, démontrer :

$$(1 - u^3)a + u^3(1 - v^3)b + u^3v^3(1 - w^3)c = 0$$

e) On rappelle : $j = uvw$. Démontrer alors que le complexe E défini en question 6, et dont on peut trouver une expression en 6c, vérifie : $E = 0$.

f) Conclure que PQR est un triangle équilatéral.

Problème 2

On note : $f = \tan]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} f & : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \tan(x) \end{array}$$

9. (*) Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

On note $\arctan = f^{-1}$.

10. Quelle est la monotonie de $\arctan$ sur J ? Justifier.

11. Démontrer que la fonction $\arctan$ est impaire.

12. Démontrer que la fonction $\arctan$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

13. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.