

DS2



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum_{k=1}^n k$? Le démontrer.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

► **Initialisation**

- D'une part : $\sum_{k=1}^0 k = \sum_{k \in \emptyset} k = 0$.
- D'autre part : $\frac{0(0+1)}{2} = 0$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n+1}{2}(n+2) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

□

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Démonstration.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Supposons qu'il existe deux fonctions $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- 1) $f = g + h$,
- 2) g est paire,
- 3) h est impaire.

On remarque tout d'abord, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ (car l'intervalle I est symétrique par rapport à 0) et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (g+h)(-x) && (d'après \mathbf{1}) \\ &= g(-x) + h(-x) \\ &= g(x) - h(x) && (car \textit{g} \textit{ paire et h} \\ &&& \textit{impaire}) \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(x) - h(x) = f(-x) \end{cases} &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ -2h(x) = -f(x) + f(-x) \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ -2h(x) = -f(x) + f(-x) \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \end{matrix}} \begin{cases} g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

• Synthèse : On pose

$$\begin{aligned} g_0 : I &\rightarrow \mathbb{R} & h_0 : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} & \text{et} & x &\mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

On remarque alors :

× tout d'abord : $f = g_0 + h_0$. En effet, pour tout $x \in I$:

$$(g_0 + h_0)(x) = g_0(x) + h_0(x) = \frac{f(x) + \cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x) - \cancel{f(-x)}}{2} = \frac{\mathbf{2} f(x)}{\mathbf{2}} = f(x)$$

× ensuite, g_0 est paire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$g_0(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g_0(x)$$

× enfin, h_0 est impaire. En effet, pour tout $x \in I$, alors $-x \in I$ et :

$$h_0(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h_0(x)$$

Toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

□

3. Soit E un ensemble. Soient A, B, C et D des parties de E .

a) (*) Démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ C \subset D \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$$

Démonstration.

Supposons : $\left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ C \subset D \end{array} \right.$. Démontrons : $A \cup C \subset B \cup D$.

Soit $x \in A \cup C$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in A$, comme $A \subset B$, alors : $x \in B$.
Or : $B \subset B \cup D$. Ainsi : $x \in B \cup D$.
- Si $x \notin A$, comme $x \in A \cup C$, alors : $x \in C$.
De plus : $C \subset D$. Donc : $x \in D$.
Or : $D \subset B \cup D$. Ainsi : $x \in B \cup D$.

Dans tous les cas : $x \in B \cup D$.

On en déduit : $A \cup C \subset B \cup D$.

Finalement : $\left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ C \subset D \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D.$

□

b) Démontrer : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

Démonstration.

Soit $x \in E$. Deux cas se présentent.

- si $x \in A$, deux nouveaux cas se présentent :

× si $x \in B$, alors :

- $\mathbb{1}_A(x) = 1$, car $x \in A$,
- $\mathbb{1}_B(x) = 1$, car $x \in B$,
- $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$, car, comme $x \in A$ et $A \subset A \cup B$, alors : $x \in A \cup B$,
- $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1$, car, comme $x \in A$ et $x \in B$, alors : $x \in A \cap B$.

Ainsi :

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1 = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$$

× si $x \notin B$, alors :

- $\mathbb{1}_A(x) = 1$, car $x \in A$,
- $\mathbb{1}_B(x) = 0$, car $x \notin B$,
- $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$, car, comme $x \in A$ et $A \subset A \cup B$, alors : $x \in A \cup B$,
- $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0$, car, comme $x \notin B$ et $A \cap B \subset B$, alors : $x \notin A \cap B$.

Ainsi :

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1 = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$$

- si $x \notin A$, deux nouveaux cas se présentent :

× si $x \in B$, alors :

- $\mathbb{1}_A(x) = 0$, car $x \notin A$,
- $\mathbb{1}_B(x) = 1$, car $x \in B$,
- $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1$, car, comme $x \in B$ et $B \subset A \cup B$, alors : $x \in A \cup B$,
- $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0$, car, comme $x \notin A$ et $A \cap B \subset A$, alors : $x \notin A \cap B$.

Ainsi :

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0 + 1 - 0 = 1 = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$$

× si $x \notin B$, alors :

- $\mathbb{1}_A(x) = 0$, car $x \notin A$,
- $\mathbb{1}_B(x) = 0$, car $x \notin B$,
- $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 0$, car, comme $x \notin A$ et $x \notin B$, alors : $x \notin A \cup B$,
- $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0$, car, comme $x \notin A$ et $A \cap B \subset A$, alors : $x \notin A \cap B$.

Ainsi :

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0 + 0 - 0 = 0 = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$$

Finalement :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$$

Ainsi : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

□

4. Soient A_1 et A_2 des parties de E . Démontrer :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

Démonstration.

On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Alors il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.

Ceci signifie que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Deux cas se présentent alors :

- × si $x \in A_1$: alors on a $y = f(x) \in f(A_1)$.
- × si $x \notin A_1$: alors, comme $x \in A_1 \cup A_2$, on a forcément $x \in A_2$.
On en déduit que $y = f(x) \in f(A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

($\supset$) Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Ceci signifie que $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Deux cas se présentent alors :

- × si $y \in f(A_1)$: il existe donc $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.
Or $A_1 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
- × si $y \notin f(A_1)$: alors comme $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, on a forcément $y \in f(A_2)$. Il existe donc $x \in A_2$ tel que $y = f(x)$.
Or $A_2 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Finalement : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

□

5. On note f la fonction définie par $f : x \mapsto \sqrt{1 + e^{-x}}$.

Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ de :

- $f_1 : x \mapsto 1 + e^{-x}$ qui :
 - × est dérivable sur $\mathbb{R}$,
 - × vérifie : $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$,
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

□

Exercice 2

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$$

On note th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{th} : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

A - Étude d'une fonction

6. Étudier la parité de f .

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

- Tout d'abord, on obtient bien : $-x \in \mathbb{R}^*$.
- Ensuite :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) \times \operatorname{sh} \left(\frac{1}{-x} \right) \\ &= -x \operatorname{sh} \left(-\frac{1}{x} \right) \\ &= -x \times \left(-\operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \quad (\text{car la fonction sh est impaire}) \\ &= x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) = f(x) \end{aligned}$$

La fonction f est donc paire.

□

7. a) Rappeler la valeur de $\operatorname{sh}'(0)$. En déduire les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Démonstration.

On rappelle : $\operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On remarque :

$$f(x) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) - \operatorname{sh}(0)}{\frac{1}{x} - 0}$$

Or :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) - \operatorname{sh}(0)}{\frac{1}{x} - 0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(t) - \operatorname{sh}(0)}{t - 0} \quad (\text{avec le changement de variable } t = \frac{1}{x}) \\ &= \operatorname{sh}'(0) \quad (\text{car sh est dérivable en 0}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en conclut : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Par parité de f : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

□

b) Déterminer la limite de f en 0.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) = x \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{2} = \frac{1}{2} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x e^{-\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right)$$

- On remarque ensuite, avec le changement de variable $t = \frac{1}{x}$:

$$\times \text{ d'une part : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \quad (\text{par croissances comparées})$$

$$\times \text{ d'autre part : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t} = 0$$

- On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Par parité de f : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

Finalement : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

□

8. (*) Démontrer que la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \times \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $g : x \mapsto \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$ est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :

$$\times g_1 : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ qui :}$$

- est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,
- vérifie : $g_1(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}$,

$$\times g_2 = \operatorname{sh} \text{ qui est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

La fonction f est alors dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, car elle est le produit de fonctions dérivables sur ces intervalles.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \times \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) &= \operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right)} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \times \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right).$

□

9. Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{th}(t) < t$.

Démonstration.

On note h la fonction définie par :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \operatorname{th}(x) \end{aligned}$$

- Tout d'abord, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est le quotient $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ de :
 - × sh qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
 - × ch qui :
 - est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction h est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est la combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x) = 1 - \operatorname{th}'(x) = 1 - \frac{\operatorname{ch}(x) \times \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) \times \operatorname{sh}(x)}{(\operatorname{ch}(x))^2} = 1 - \left(1 - (\operatorname{th}(x))^2 \right) = (\operatorname{th}(x))^2$$

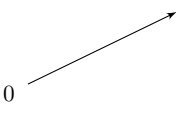
Démontrons : $h'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} h'(x) > 0 &\Leftrightarrow (\operatorname{th}(x))^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{th}(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sh}(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \end{aligned}$$

Or, cette dernière assertion est vraie, car : $x > 0$.

Par raisonnement par équivalence, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) > 0$.

- On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Variations de h		

Comme la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) > h(0)$$

De plus : $h(0) = 0$.

On en conclut : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{th}(t) < t$.

Commentaire

On pouvait également remarquer qu'il s'agissait d'une inégalité de convexité. On aurait alors rédigé ainsi.

- On démontre que la fonction th est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$\text{th}'(x) = 1 - (\text{th}(x))^2$$

On en déduit :

$$\text{th}''(x) = -2 \text{th}'(x) \text{th}(x) = -2 \left(1 - (\text{th}(x))^2\right) \text{th}(x)$$

Or :

$$\begin{aligned}
 1 - (\text{th}(x))^2 &= 1 - \frac{(\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2} \\
 &= \frac{(\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2} \\
 &= \frac{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}{(\text{ch}(x))^2} \\
 &= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - (\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}})}{4 (\text{ch}(x))^2} \\
 &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} (\text{ch}(x))^2} = \frac{1}{(\text{ch}(x))^2}
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}''(x) = -2 \frac{\text{th}(x)}{(\text{ch}(x))^2}$.

Commentaire

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On détermine le signe de $\text{th}''(x)$.

$$\text{th}''(x) < 0 \Leftrightarrow -2 \frac{\text{th}(x)}{(\text{ch}(x))^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{th}(x) > 0 \quad (\text{car} : -2 \frac{1}{(\text{ch}(x))^2} < 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sh}(x) > 0 \quad (\text{car} : \text{ch}(x) > 0)$$

Or, cette dernière assertion est vraie (car : $x > 0$).

Par raisonnement par équivalence, la première aussi. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{th}''(x) < 0$.
La fonction th est donc (strictement) concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

- La courbe représentative de th est donc située en dessous de ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse 0 d'équation :

$$\begin{aligned} y &= \text{th}(0) + \text{th}'(0)(x - 0) \\ &= 0 + 1 \times x = x \end{aligned}$$

On en conclut : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{th}(x) \leq t$.

- Enfin, puisque th est strictement concave, l'égalité n'a lieu qu'en 0 (abscisse du point de tangence). Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{th}(x) < t$$

□

10. En déduire le tableau de variations de f .

Démonstration.

- D'après la question 8., pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \left(\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

En appliquant la question précédente à $t = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$. Donc :

$$\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$$

De plus : $\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Ainsi :

$$\left(\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

||

$$f'(x)$$

- On en déduit le tableau de variations suivant avec **7.a)** et **7.b)**.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		—
Variations de f		$+\infty$  1

- Enfin, d'après la question **6.**, la fonction f est paire. On en déduit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		—
Variations de f	1  $+\infty$		$+\infty$  1

□

- 11. a)** (*) Justifier que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est une bijection. On note g sa bijection réciproque.

Démonstration.

La fonction f est :

- × continue (car dérivable d'après **8.**) sur $\mathbb{R}_+^*$,
- × strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question précédente.

Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$. Or, d'après **7.a)** et **7.b)** :

$$f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right[=]1, +\infty[$$

La restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1, +\infty[$.

□

- b)** Démontrer que la fonction g est dérivable et strictement monotone sur un intervalle que l'on déterminera. Préciser son sens de monotonie.

Démonstration.

La fonction f :

- × est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question précédente,
- × est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
- × vérifie, d'après **10.** : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) \neq 0$.

On en déduit que sa bijection réciproque g est dérivable sur $]1, +\infty[$.

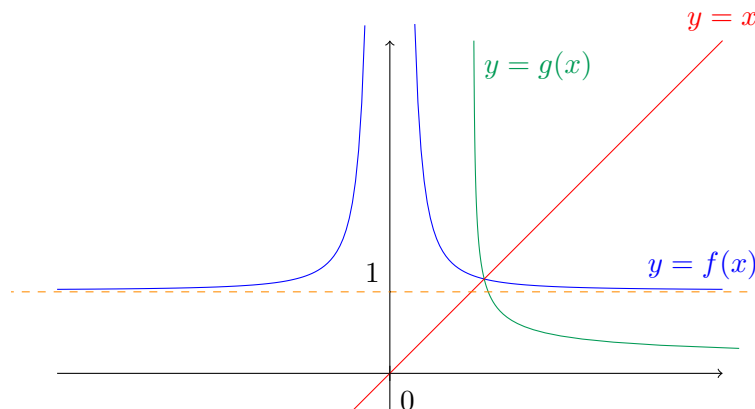
De plus, d'après le théorème de la bijection, la fonction g est strictement monotone sur $]1, +\infty[$ de même sens de monotonie que $f|_{\mathbb{R}_+^*}$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

□

12. Tracer l'allure des courbes représentatives de f et g sur un même graphique.

Démonstration.



□

B - Étude d'une suite

13. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
On la note u_n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question **11.a)**, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1, +\infty[$.

Or : $\frac{n+1}{n} \in]1, +\infty[$.

L'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

□

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les deux questions suivantes.

14. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition de u_n et u_{n+1} :

$$f(u_n) = \frac{n+1}{n} \quad \text{et} \quad f(u_{n+1}) = \frac{n+2}{n+1}$$

On cherche à ordonner $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. Pour cela, on remarque :

$$\begin{aligned} f(u_n) > f(u_{n+1}) &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \\ &\Leftrightarrow (n+1)^2 > n(n+2) \\ &\Leftrightarrow \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 > \cancel{n^2} + \cancel{2n} \\ &\Leftrightarrow 1 > 0 \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie.

Ainsi, par raisonnement par équivalence, la première aussi. On en déduit :

$$f(u_n) > f(u_{n+1})$$

Or, d'après **11.b**), la fonction g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} g(f(u_n)) & < & g(f(u_{n+1})) \\ \parallel & & \parallel \\ u_n & < & u_{n+1} \end{array}$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Commentaire

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite (u_n) . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution strictement positive de l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction f .

- De cette définition, on tire la propriété : $\forall m \in \mathbb{N}^*, f(u_m) = \frac{m+1}{m}$.

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n) .

On l'utilise en **11.b**) pour $m = n$ et pour $m = n + 1$.

- Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, on n'étudie pas la monotonie de (u_n) à l'aide de la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f(u_n) > f(u_{n+1})$$

et de conclure : $u_n < u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f .

□

15. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition de u_n : $f(u_n) = \frac{n+1}{n}$. Alors, par définition de g :

$$g\left(\frac{n+1}{n}\right) = g(f(u_n)) = u_n$$

Or, d'après **7.a**) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$. On obtient :

× d'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$,

× d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{n+1}{n}\right) = +\infty$.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

□

Problème I

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

16. (*) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :
 - × $f_1 : x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0, 1[$ car elle est la composée $f_1 = g_2 \circ g_1$ où :
 - $g_1 : x \mapsto 1-x$:
 - ▶ est dérivable sur $]0, 1[$,
 - ▶ vérifie : $g_1(]0, 1[) \subset]0, 1[$.
 - $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, 1[$.
 - × $f_2 : x \mapsto \ln(x)$:
 - est dérivable sur $]0, 1[$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $]0, 1[$.

La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$.

- Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{1-x} \ln(x) - \ln(1-x) \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{\frac{-x(1-x)}{1-x} \ln(x) - \ln(1-x) \frac{x(1-x)}{x}}{x(1-x)(\ln(x))^2} \\ &= \frac{-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln(x))^2} \end{aligned}$$

On a bien : $\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension de ce point, on a rédigé en détails la dérivabilité de la fonction f_1 qui est obtenue comme composée ($f_2 = g_2 \circ g_1$). Mais un tel niveau de détails n'est certainement pas attendu par les correcteurs.

Commentaire

- De manière générale, il n'est pas nécessaire de rédiger aussi précisément les questions portant sur la régularité de fonctions. Il est conseillé :
 - × de rédiger très proprement la régularité d'une fonction pour les questions que l'on traite en premier. On démontre ainsi au correcteur sa capacité à rédiger ce type de questions et on pourra alors réduire le niveau de détail pour les questions suivantes.
 - × de rédiger très proprement la régularité lorsqu'il s'agit du cœur de la question (« Démontrer que la fonction est continue / de classe $\mathcal{C}^1$ sur ... »)

Dans les autres cas, on pourra se contenter d'écrire que la fonction f est dérivable sur J (intervalle à déterminer) car elle est la composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats. Évidemment, cela n'apportera pas de point si l'intervalle J n'est pas le bon.

- Les précisions apportées dans cette question permettent de rappeler la formule de dérivation d'une composée. On a :

$$\forall x \in]0, 1[, (g_2 \circ g_1)'(x) = g_2'(g_1(x)) \times g_1'(x)$$

Ici on a : $g_1'(x) = -1$. Il est évidemment primordial de ne pas oublier ce terme dans l'obtention de la dérivée. L'énoncé donne ici la solution ce qui permet de vérifier que l'on n'a pas commis ce type d'erreur.

□

17. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$.

Démonstration.

Soit $t \in]0, 1[$.

Alors $\ln(t) < 0$ (par définition de la fonction $\ln$)

donc $t \ln(t) < 0$ (par multiplication par $t > 0$)

$$\boxed{\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0}$$

□

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

Démonstration.

Soit $x \in]0, 1[$.

- D'après la question 16., on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

Or : $x > 0, 1-x > 0$ et $(\ln(x))^2 > 0$. Ainsi : $x(1-x)(\ln(x))^2 > 0$.

On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de la quantité $-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)$.

- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = x \in]0, 1[$, on obtient : $x \ln(x) < 0$ et donc $-x \ln(x) > 0$.
- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = 1-x \in]0, 1[$, on obtient : $(1-x) \ln(1-x) < 0$ et donc $-(1-x) \ln(1-x) > 0$.

Ainsi : $-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x) > 0$.

On en déduit : $\forall x \in]0, 1[, f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, 1[$.

Commentaire

La propriété démontrée dans la question précédente a été démontrée pour tout $t \in]0, 1[$. On ne peut donc l'utiliser que pour un réel $t \in]0, 1[$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédemment démontré ou admis, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat. □

18. Démontrer que la fonction f admet une limite finie en 0. Quelle est-elle ?

Démonstration.

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0 \times 0 = 0$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

□

19. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$.
- En posant $t = 1 - x$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) = -\infty$.

On en déduit, par produit de limites :

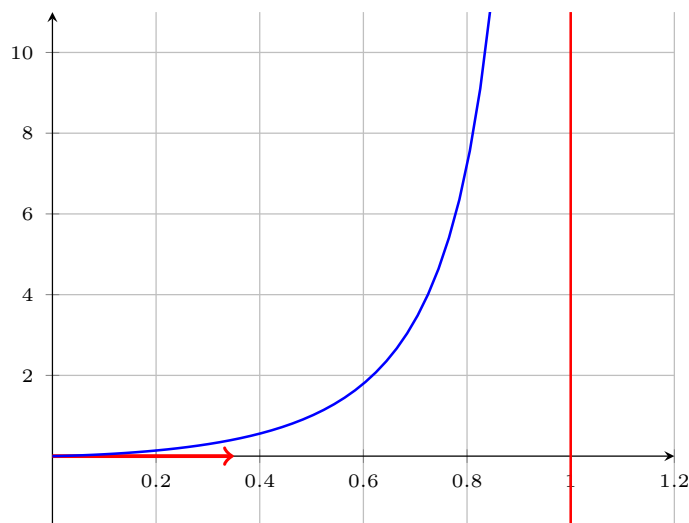
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f . □

20. On admet que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = 0$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Démonstration.



□

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

21. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.

- La fonction h_n est une fonction polynomiale (de degré n).
Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h'_n(x) = n x^{n-1} + 1$$

Comme $x \geq 0$, alors : $x^{n-1} \geq 0$. Ainsi : $n x^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$	+	
h_n	-1	$+\infty$

- La fonction h_n est :
 × continue sur $[0, +\infty[$,
 × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $h_n([0, +\infty[)$. Or :

$$h_n([0, +\infty[) = [h_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)[= [-1, +\infty[$$

Comme $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in [0, +\infty[$.

L'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ notée u_n .

□

22. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Remarquons :

× $h_n(0) = -1$.

× $h_n(u_n) = 0$, par définition.

× $h_n(1) = 1$.

Ainsi :

$$h_n(0) < h_n(u_n) < h_n(1)$$

• Or, d'après le théorème de la bijection, $h_n^{-1} : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. En appliquant h_n^{-1} , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} h_n^{-1}(h_n(0)) & < & h_n^{-1}(h_n(u_n)) & < & h_n^{-1}(h_n(1)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & u_n & & 1 \end{array}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, 1[$.

□

23. Déterminer u_1 et u_2 .

Démonstration.

• Par définition, u_1 est l'unique solution positive de l'équation : $h_1(x) = 0$. Or :

$$h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On en déduit : $u_1 = \frac{1}{2}$.

• Par définition, u_2 est l'unique solution positive de l'équation : $h_2(x) = 0$. Or :

$$h_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Notons $P(X) = X^2 + X - 1$ le polynôme de degré 2 associé à la fonction h_2 .

Ce polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.

Ainsi, P admet deux racines :

$$x_- = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Comme $5 \geq 1$, alors : $\sqrt{5} \geq \sqrt{1} = 1$ et ainsi : $\sqrt{5} - 1 \geq 0$.

On en déduit : $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

□

24. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1  def valeur_approchee(n) :
2      '''valeur_approchee(n : int) -> u : float'''
3      a = 0
4      b = 1
5      while ... :
6          c = (a + b) / 2
7          if (c**n + c - 1) > 0 :
8              ...
9          else :
10             ...
11             u = ...
12     return u

```

Démonstration.

- Afin de bien comprendre tous les mécanismes en jeu, on se permet d'apporter une réponse très détaillée à cette question, accompagnée d'un aparté sur la méthode de recherche par dichotomie. Il faut toutefois garder en tête qu'un tel niveau de détail n'est pas du tout attendu lors des concours. Fournir la fonction **Scilab** démontre la bonne compréhension et permet d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.

Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie

Données :

- × une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- × un intervalle de recherche $[a, b]$,
- × une précision de recherche ε .

Résultat : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[a, b]$) de la fonction f .
Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $x \in [a, b]$ tel que : $f(x) = 0$.

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :
 - × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de f .
Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.
 - × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de f .
Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.

On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de f et de largeur plus faible que ε . Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro de f contenu dans I .

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[a, b]$.

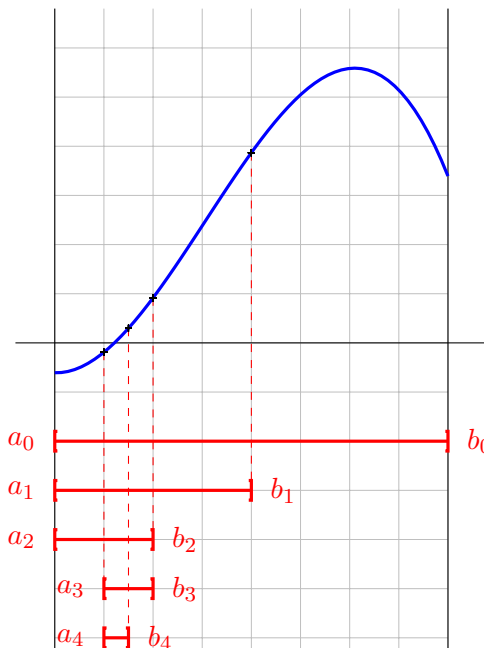
Supposons : $f(a) f(b) \leq 0$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Calcul des suites (a_m) , (b_m) , (c_m)

Cas $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$

- Initialement, $a_0 = a$, $b_0 = b$
- À chaque tour de boucle (tant que $b_m - a_m > \varepsilon$) :
 - × $c_m = \frac{a_m + b_m}{2}$ (point milieu de $[a_m, b_m]$)
 - × si $f(c_m) < 0$ alors : × si $f(c_m) \geq 0$ alors :
 - * $a_{m+1} = c_m$ * $a_{m+1} = a_m$
 - * $b_{m+1} = b_m$ * $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite $([a_m, b_m])_{m \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
 - × contenant tous un zéro de f ,
 - × dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche une valeur de x telle que : $h_n(x) = 0$.
On se fixe initialement l'intervalle de recherche $[0, 1]$ de sorte que l'équation $h_n(x) = 0$ ne possède qu'une solution, à savoir la valeur u_n qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables **a** et **b** destinées à contenir les valeurs successives de a_m et b_m . Ces variables sont initialisées respectivement à 0 et 1.

3	a = 0
4	b = 1

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision 10^{-3} escomptée.

5	while (b - a) > 10*(-3) :
---	--

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

5	c = (a + b) / 2
---	--

Puis on teste si $h_n(c) > 0$.

Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de gauche.

7	if (c * n + c - 1) > 0 :
8	b = c

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de droite.

$\frac{9}{10}$	else :
	$a = c$

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que 10^{-3} et contient un zéro de h_n . Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à 10^{-3} près de ce zéro.

On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

$\frac{11}{10}$	$u = a$
-----------------	---------

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

$\frac{11}{10}$	$u = b$
-----------------	---------

Ou encore le point milieu :

$\frac{11}{10}$	$u = (a + b) / 2$
-----------------	-------------------

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\frac{10^{-3}}{2}$ de ce point milieu.

On obtient ainsi une valeur approchée à $\frac{10^{-3}}{2}$ du zéro recherché.

Commentaire

- On peut se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :

- × l'intervalle de recherche initial $[0, 1]$ est de largeur 1.

- × la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.

À la fin du $m^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\frac{1}{2^m}$.

- × l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que 10^{-3} .

On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\frac{1}{2^m} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2^m \geq 10^3 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^m) \geq \ln(10^3) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\Leftrightarrow m \ln(2) \geq 3 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow m \geq 3 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \quad (\text{car } \ln(2) > 0)$$

Ainsi : $\left\lceil 3 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

On retiendra que si l'on souhaite obtenir une précision de 3 chiffres après la virgule, il suffit d'effectuer de l'ordre de 3 tours de boucle. Cet algorithme est donc extrêmement rapide.

- On obtient le programme complet suivant.

```

1  def valeur_approchee(n) :
2      '''valeur_approchee(n : int) -> u : float'''
3      a = 0
4      b = 1
5      while (b-a) > 10**(-3) :
6          c = (a + b) / 2
7          if (c**n + c - 1) > 0 :
8              b = c
9          else :
10             a = c
11         u = (a + b) / 2
12     return u

```

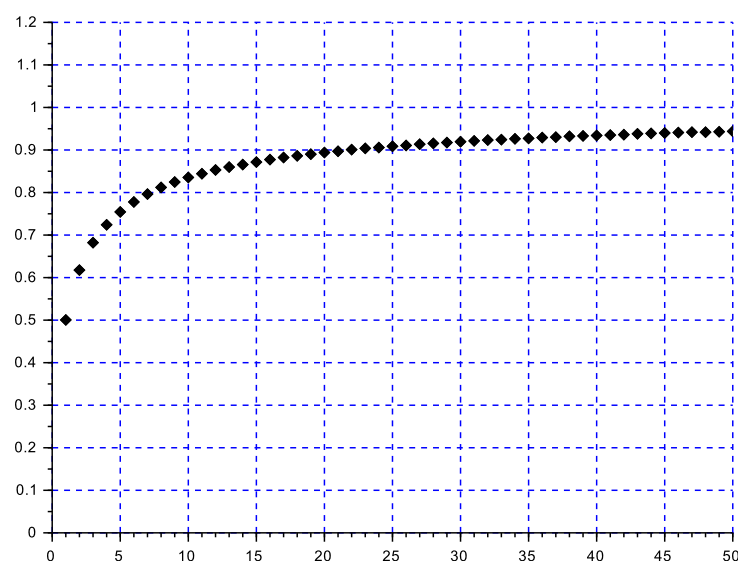
Commentaire

Dans le programme à trous donné par l'énoncé, l'instruction :

11 `u = ...`

apparaît en ligne 11, comme dernière instruction de la boucle. Dans ce cas, l'affectation `u = a` va être effectuée à chaque tour de boucle. Ainsi, la valeur de la variable `u` est écrasée à chaque tour de boucle. Il en résulte que la variable `u` contient en fin de boucle la dernière valeur qui lui a été affectée. De ce fait, on peut s'interroger sur la pertinence d'une telle présentation. Comme seule la dernière affectation `u = a` permet de définir la valeur de la variable `u`, il apparaît bien plus raisonnable d'effectuer cette instruction une seule fois en sortie de boucle. C'est le choix qui est fait dans ce corrigé. □

- b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



Démonstration.

Le graphe permet d'effectuer les conjectures suivantes :

- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante,
- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{2}$,
- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1,
- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

Commentaire

On lit sur ce graphe les valeurs :

$$u_1 = 0.5 \quad \text{et} \quad u_2 \simeq 0.61$$

Cela permet de vérifier les résultats donnés en question 23.

En particulier, 0.61 est bien une valeur approchée de la quantité $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

□

25. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{\ln(1 - u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= \frac{\ln(u_n^n)}{\ln(u_n)} \quad (\text{car } u_n^n = 1 - u_n \text{ par définition de } u_n) \\ &= \frac{n \ln(u_n)}{\ln(u_n)} \end{aligned}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = n$.

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$f(u_n) = n \leq n + 1 = f(u_{n+1})$$

- Or, d'après l'étude en **Partie A**, la fonction f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. En appliquant f^{-1} , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(f(u_n)) & \leq & f^{-1}(f(u_{n+1})) \\ \parallel & & \parallel \\ u_n & & u_{n+1} \end{array}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

Commentaire

- La **Partie B** consiste en l'étude de la suite (u_n) . On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite (u_n) mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique solution positive de l'équation $h_n(x) = 0$

On comprend alors que l'étude de (u_n) va passer par l'étude des propriétés de la fonction h_n .

- De cette définition, on tire la propriété : $\forall m \in \mathbb{N}^*, h_m(u_m) = 0$.

Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite (u_n) .

On l'utilise en question 22.

- La question 25.a) établit une propriété équivalente à cette propriété de définition de la suite (u_n) , à savoir : $\forall m \in \mathbb{N}^*, f(u_m) = m$.

C'est de cette propriété dont on se sert ici (en $m = n$ et $m = n + 1$) pour démontrer la monotonie de la suite (u_n) . Comme la suite (u_n) est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

et de conclure : $u_n \leq u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de f .

□

- c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, la suite (u_n) est :
 - × croissante,
 - × majorée par 1 (on démontre en question 22. : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, 1[$).

On en conclut que la suite (u_n) est convergente de limite $\ell \in [0, 1]$.

Commentaire

- On rappelle que, par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent **larges**. Plus précisément :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n > a \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \geq a$$

- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$:

× d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$

× d'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \not> 0$

- Par ailleurs, comme la suite (u_n) est croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_1 = \frac{1}{2}$$

On en conclut, par passage à la limite : $\ell \geq \frac{1}{2}$.

- Démontrons alors $\ell = 1$. Pour ce faire, on procède par l'absurde.
On suppose : $\ell \neq 1$. D'après ce qui précède, on a donc : $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[$.
La fonction f est continue en $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[\subseteq]0, 1[$. Ainsi, la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite $f(\ell) \in \mathbb{R}$. Par passage à la limite dans l'égalité définie en **25.a**, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & = & n \\ \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{8} \end{array} & & \begin{array}{c} \approx \\ \downarrow \\ \frac{1}{8} \end{array} \\ f(\ell) & & +\infty \end{array}$$

Absurde !

On en conclut que la suite (u_n) est convergente de limite $\ell = 1$.

□

Problème II

Partie I : Somme des carrés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2$$

26. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $(k+1)^3 - k^3$ en fonction de k et k^2 .

Démonstration.

On remarque :

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - k^3 &= (\cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1) - \cancel{k^3} && \text{(par formule du binôme)} \\ &= 3k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

□

27. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant la somme $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ de deux manières différentes, démontrer :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration.

• D'une part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) &= (n+1)^3 - 1^3 && \text{(par télescopage)} \\ &= (n+1)^3 - 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - \cancel{1} \\ &= n(n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$

• D'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) &= \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 && \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= 3S_2(n) + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= 3S_2(n) + n \left(\frac{3(n+1)}{2} + 1 \right) \\ &= 3S_2(n) + n \times \frac{3(n+1) + 2}{2} \\ &= 3S_2(n) + n \frac{3n+5}{2} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$3S_2(n) + n \frac{3n+5}{2} = n(n^2 + 3n + 3)$$

$$\text{donc} \quad 3S_{2n} = n(n^2 + 3n + 3) - n \frac{3n+5}{2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3} \left(n(n^2 + 3n + 3) - n \frac{3n+5}{2} \right) \\ &= \frac{n}{3} \left(n^2 + 3n + 3 - \frac{3n+5}{2} \right) \\ &= \frac{n}{6} (2(n^2 + 3n + 3) - (3n + 5)) \\ &= \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1) \\ &= \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \quad \text{(car } -1 \text{ est racine évidente} \\ &\quad \text{du polynôme } 2X^2 + 3X + 1) \end{aligned}$$

Finalement : $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

□

Partie II : Une approche générale

On souhaite trouver, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de : $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

28. a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j$$

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (k+1)^{p+1} - k^{p+1} &= \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \times 1^{p+1-j} - k^{p+1} \quad \text{(par formule du binôme)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j + \cancel{\binom{p+1}{p+1} k^{p+1}} \right) - \cancel{k^{p+1}} \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j$

□

b) En sommant cette égalité pour k variant entre 1 et n , démontrer :

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

Démonstration.

En sommant les égalités de la question précédente pour k variant entre 1 et n , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j \right)$$

De plus :

× d'une part, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = (n+1)^{p+1} - 1^{p+1} = (n+1)^{p+1} - 1$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j \right) &= \sum_{j=0}^p \left(\sum_{k=1}^n \binom{p+1}{j} k^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^p \left(\binom{p+1}{j} \sum_{k=1}^n k^j \right) \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= \sum_{j=0}^p \left(\binom{p+1}{j} S_j(n) \right) \end{aligned}$$

On en conclut : $(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$

□

29. En déduire :

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right)$$

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} (n+1)^{p+1} - 1 &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) + \binom{p+1}{p} S_p(n) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) + (p+1) S_p(n) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(p+1) S_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

Finalement : $S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right)$.

□

30. Utiliser cette relation de récurrence pour calculer $S_3(n)$.

Démonstration.

D'après la question précédente appliquée à $p = 3$:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{3+1} \left((n+1)^{3+1} - 1 - \sum_{j=0}^{3-1} \binom{3+1}{j} S_j(n) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - 1 - \left(\binom{4}{0} S_0(n) + \binom{4}{1} S_1(n) + \binom{4}{2} S_2(n) \right) \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\times \text{ tout d'abord : } S_0(n) = \sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

$$\times \text{ ensuite : } S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\times \text{ enfin, d'après 27. : } S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \binom{4}{0} S_0(n) + \binom{4}{1} S_1(n) + \binom{4}{2} S_2(n) &= 1 \times n + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n(1 + 2(n+1) + (n+1)(2n+1)) \\ &= n(2n^2 + 5n + 4) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$(n+1)^4 - 1 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + \textcolor{red}{1} - \textcolor{red}{1} = n(n^3 + 4n^2 + 6n + 4)$$

On en conclut :

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4} (n(n^3 + 4n^2 + 6n + 4) - n(2n^2 + 5n + 4)) \\ &= \frac{n}{4} (n^3 + 2n^2 + n) \\ &= \frac{n^2}{4} (n^2 + 2n + 1) \\ &= \frac{n^2}{4} (n+1)^2 \end{aligned}$$

Finalement : $S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

□

Partie III : Un exemple avec une somme double

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$T(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$$

31. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer : $T(n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$.

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} (i + j) \right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + j \sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) && \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{(j-1)j}{2} + j(j-1) \right) \\ &= \frac{3}{2} \sum_{j=2}^n j(j-1) \\ &= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j^2 + j) \\ &= \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j \right) && \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \right) \\ &= \frac{3(n-1)n}{2 \times 6} (2n-1+3) \\ &= \frac{(n-1)n}{4} (2n+2) \\ &= \frac{(n-1)n \times 2(n+1)}{4} \end{aligned}$$

Finalement : $T(n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$.

□

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans le plan n points alignés $A_1, A_2, \dots, A_n$ équidistants et vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, A_i A_{i+1} = 1$$

32. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Supposons : $i < j$. Exprimer la longueur $A_i A_j$ en fonction de i et j .

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned} A_i A_j &= A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2} + \dots + A_{j-2} A_{j-1} + A_{j-1} A_j \quad (\text{car } A_1, A_2, \dots, A_n \\ &\quad \text{sont alignés}) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} A_k A_{k+1} \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} 1 \\ &= (j - \cancel{i}) - i + \cancel{i} \end{aligned}$$

Ainsi : $A_i A_j = j - i$.

□

33. En conclure : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j = \frac{n(n^2 - 1)}{6}$.

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} (j - i) \right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(j \sum_{i=1}^{j-1} 1 - \sum_{i=1}^{j-1} i \right) \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{j(j-1) - (j-1)j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n j(j-1) \\ &= \frac{1}{3} T(n) \quad (\text{d'après les calculs de 31.}) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{n(n-1)(n+1)}{2} \quad (\text{toujours d'après 31.}) \end{aligned}$$

Finalement : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j = \frac{n(n^2 - 1)}{6}$.

□