
DS2 /90



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum_{k=1}^n k$? Le démontrer.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- 3 pts : analyse
 - × 1 pt : $-x \in I$ car...
 - × 1 pt : $f(-x) = g(x) - h(x)$ car...
 - × 1 pt : résolution de système par pivot de Gauss
- 1 pt : synthèse

3. Soit E un ensemble. Soient A , B , C et D des parties de E .

a) (*) Démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ C \subset D \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$$

- 1 pt : structures de démonstration
- 1 pt : reste

b) Démontrer : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

- 2 pts

4. Soient A_1 et A_2 des parties de E . Démontrer :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

- 1 pt : $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$
- 2 pts : $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$

5. On note f la fonction définie par $f : x \mapsto \sqrt{1 + e^{-x}}$.
Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 2 pts

Exercice 2 /29

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$$

On note th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{th} : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

A - Étude d'une fonction

6. Étudier la parité de f .

- 1 pt : $-x \in \mathbb{R}^*$
- 1 pt : $f(-x) = f(x)$ car sh est impaire

7. a) Rappeler la valeur de $\operatorname{sh}'(0)$. En déduire les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- 1 pt : $\operatorname{sh}'(0) = 1$
- 2 pts : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

× 1 pt : changement de variable

$$t = \frac{1}{x}$$

× 1 pt : sh dérivable en 0

- 1 pt : par parité de f , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

b) Déterminer la limite de f en 0.

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ (*par croissances comparées*)
- 1 pt : fin du calcul $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- 1 pt : par parité de f , $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

8. (*) Démontrer que la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \times \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right)$$

- 1 pt : $x \mapsto \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$ dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$
- 1 pt : $f'(x) = \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \times \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right)$

9. Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{th}(t) < t$.

- 1 pt : la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- 1 pt : en notant $h : x \mapsto x - \operatorname{th}(x) : h'(x) = (\operatorname{th}(x))^2$
- 1 pt : $h'(x) > 0$ car $x \neq 0$
- 1 pt : fin de la question

10. En déduire le tableau de variations de f .

- 1 pt : $\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$ car $t = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, et : $\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0$
- 1 pt : utilisation 7.a), 7.b) et 6.

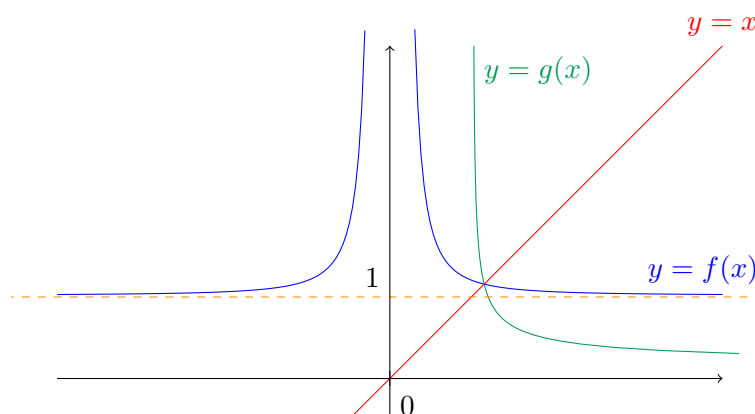
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		-
Variations de f	$\nearrow$ 1 $\rightarrow +\infty$		$\searrow$ $+\infty \rightarrow 1$

11. a) (*) Justifier que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est une bijection. On note g sa bijection réciproque.

- 1 pt : La restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1, +\infty[$.
- b) Démontrer que la fonction g est dérivable et strictement monotone sur un intervalle que l'on déterminera. Préciser son sens de monotonie.
 - 1 pt : dérivabilité de g sur $]1, +\infty[$
 - 1 pt : stricte décroissance de g sur $]1, +\infty[$

12. Tracer l'allure des courbes représentatives de f et g sur un même graphique.

- 4 pts : tracé
 - × 1 pt : asymptote
 - × 1 pt : symétrie et limites pour la courbe $y = f(x)$
 - × 1 pt : symétrie par rapport à $y = x$
 - × 1 pt : reste



B - Étude d'une suite

13. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
On la note u_n .

- 1 pt : $\frac{n+1}{n} \in]1, +\infty[$

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les deux questions suivantes.

14. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

- 1 pt : $f(u_n) > f(u_{n+1})$
- 1 pt : d'après 11.b), la fonction g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

15. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

- 1 pt : $u_n = g\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (utilisation de 7.a))

Problème I /29

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

16. (*) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

- 1 pt : dérivabilité de f sur $]0, 1[$
- 1 pt : $f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$

17. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$.

- 1 pt

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

- 1 pt : $x \in]0, 1[$ et $(1-x) \in]0, 1[$
- 1 pt : $f'(x) > 0$ donc...

18. Démontrer que la fonction f admet une limite finie en 0. Quelle est-elle ?

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

19. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

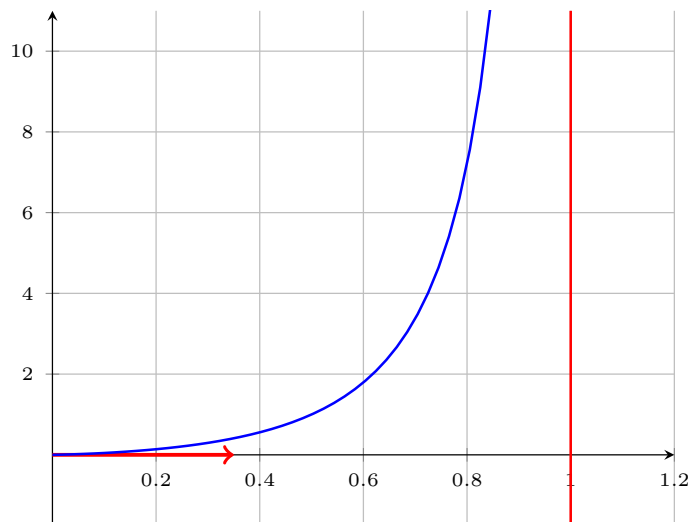
- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$
- 1 pt : la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f .

20. On admet que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = 0$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer les branches infinies éventuelles.

• 3 pts :

- × 1 pt : demi-tangente en 0
- × 1 pt : asymptote verticale
- × 1 pt : reste



Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

21. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.

En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .

• 1 pt : étude de h_n sur $\mathbb{R}_+$

x	0	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$	+	
h_n	-1	$+\infty$

• 1 pt : hypothèses du théorème de la bijection

• 1 pt : $0 \in [-1, +\infty[$

22. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

• 1 pt : $h_n(0) < h_n(u_n) < h_n(1)$

• 1 pt : d'après le théorème de la bijection, $h_n^{-1} : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$

23. Déterminer u_1 et u_2 .

• 1 pt : $u_1 = \frac{1}{2}$

• 1 pt : $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (car : $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$)

24. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1  def valeur_approchee(n) :
2      '''valeur_approchee(n : int) -> u : float'''
3      a = 0
4      b = 1
5      while ... :
6          c = (a + b) / 2
7          if (c**n + c - 1) > 0 :
8              ...
9          else :
10             ...
11             u = ...
12     return u

```

- 4 pts : 1 pt par ligne

5 while (b-a) > 10**(-3) :

8 b = c

10 a = c

11 u = (a + b) / 2

- b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

- 2 pts : 0,5 pt par item, arrondi à l'entier inférieur

- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante,
- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par $\frac{1}{2}$,
- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1,
- × la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite 1.

25. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

- 1 pt

- b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- 1 pt : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ et composition par f^{-1} strictement croissante sur $]0, +\infty[$

- c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

- 1 pt : théorème de convergence monotone
- 1 pt : $\ell \geq \frac{1}{2}$
- 1 pt : raisonnement par l'absurde pour démontrer $\ell = 1$

Problème II /16

Partie I : Somme des carrés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2$$

26. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $(k+1)^3 - k^3$ en fonction de k et k^2 .

- 1 pt : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

27. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant la somme $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ de deux manières différentes, démontrer :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- 1 pt : par télescopage : $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = n(n^2 + 3n + 3)$
- 1 pt : $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = 3 S_2(n) + n \frac{3n+5}{2}$
- 1 pt : fin calcul

Partie II : Une approche générale

On souhaite trouver, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de : $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

28. a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j$$

- 1 pt

b) En sommant cette égalité pour k variant entre 1 et n , démontrer :

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

- 1 pt

29. En déduire :

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right)$$

- 1 pt

30. Utiliser cette relation de récurrence pour calculer $S_3(n)$.

- 2 pts : $S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

Partie III : Un exemple avec une somme double

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$T(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$$

31. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer : $T(n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$.

- **1 pt** : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} (i + j) \right)$
- **1 pt** : linéarité de la somme et décalage d'indice pour obtenir $\frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j$
- **1 pt** : fin du calcul

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans le plan n points alignés $A_1, A_2, \dots, A_n$ équidistants et vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, A_i A_{i+1} = 1$$

32. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Supposons : $i < j$. Exprimer la longueur $A_i A_j$ en fonction de i et j .

- **1 pt** : utilisation de l'argument $A_1, A_2, \dots, A_n$ alignés
- **1 pt** : $A_i A_j = j - i$

33. En conclure : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j = \frac{n(n^2-1)}{6}$.

- **1 pt** : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j = \frac{1}{3} T(n)$ avec les mêmes calculs qu'en **31**.
- **1 pt** : fin de la question