

DS2



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum_{k=1}^n k$? Le démontrer.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
3. Soit E un ensemble. Soient A, B, C et D des parties de E .
a) (*) Démontrer :

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ C \subset D \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$$

b) Démontrer : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

4. Soient A_1 et A_2 des parties de E . Démontrer :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

5. On note f la fonction définie par $f : x \mapsto \sqrt{1 + e^{-x}}$.
Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$$

On note th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{th} : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

A - Étude d'une fonction

6. Étudier la parité de f .
7. a) Rappeler la valeur de $\operatorname{sh}'(0)$. En déduire les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de f en 0.
8. (*) Démontrer que la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \times \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right)$$

9. Démontrer : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{th}(t) < t$.
10. En déduire le tableau de variations de f .
11. a) (*) Justifier que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est une bijection. On note g sa bijection réciproque.
b) Démontrer que la fonction g est dérivable et strictement monotone sur un intervalle que l'on déterminera. Préciser son sens de monotonie.
12. Tracer l'allure des courbes représentatives de f et g sur un même graphique.

B - Étude d'une suite

13. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
On la note u_n .
On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les deux questions suivantes.
14. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
15. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Problème I

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A : Étude de la fonction f

16. (*) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

17. a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$.
b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.
18. Démontrer que la fonction f admet une limite finie en 0. Quelle est-elle ?
19. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
20. On admet que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = 0$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer les branches infinies éventuelles.

Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

21. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n .
22. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

23. Déterminer u_1 et u_2 .

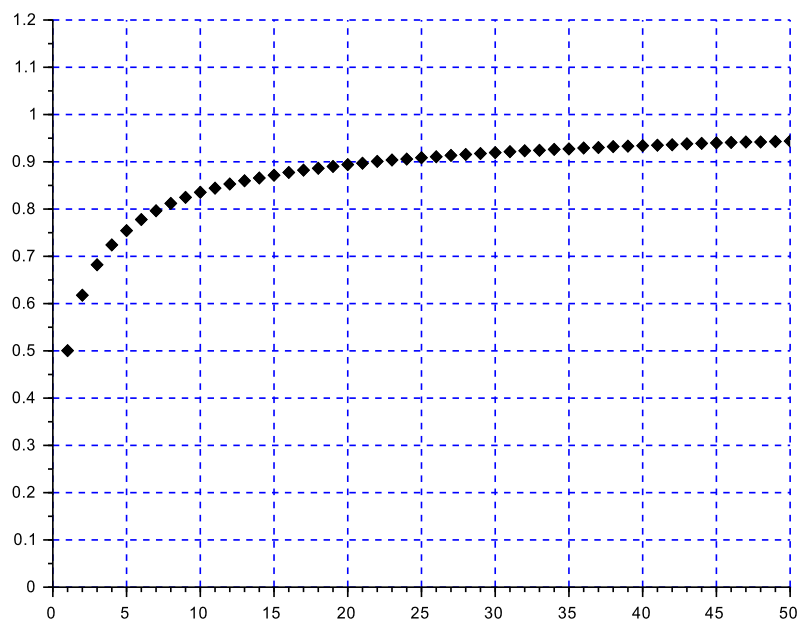
24. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1  def valeur_approchee(n) :
2      '''valeur_approchee(n : int) -> u : float'''
3      a = 0
4      b = 1
5      while ... :
6          c = (a + b) / 2
7          if (c**n + c - 1) > 0 :
8              ...
9          else :
10             ...
11             u = ...
12     return u

```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



25. a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(u_n) = n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Problème II

Partie I : Somme des carrés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2$$

26. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $(k+1)^3 - k^3$ en fonction de k et k^2 .

27. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant la somme $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ de deux manières différentes, démontrer :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie II : Une approche générale

On souhaite trouver, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de : $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

28. a) À l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j$$

b) En sommant cette égalité pour k variant entre 1 et n , démontrer :

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

29. En déduire :

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right)$$

30. Utiliser cette relation de récurrence pour calculer $S_3(n)$.

Partie III : Un exemple avec une somme double

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$T(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$$

31. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer : $T(n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans le plan n points alignés $A_1, A_2, \dots, A_n$ équidistants et vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, A_i A_{i+1} = 1$$

32. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Supposons : $i < j$. Exprimer la longueur $A_i A_j$ en fonction de i et j .

33. En conclure : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j = \frac{n(n^2-1)}{6}$.