

DS1

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. (*) Démontrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :

× $h_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$:

- est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur cet intervalle,

- vérifie : $h_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.

× $h_2 : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. □

2. On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$. Calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$.

Démonstration.

• Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\varphi'(x) = e^x - \left(e^{\frac{1}{x}} - x \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = e^x - \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = e^x + \left(\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) e^{\frac{1}{x}} = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$$

□

3. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.

En déduire le sens de variation de φ' , et montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) \geq e$.

Démonstration.

• Soit $x \in]0, +\infty[$. Déterminons le signe de $\varphi'''(x)$.

× Tout d'abord : $e^x > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$.

× Ensuite, comme $x > 0$: $\frac{3x+1}{x^5} > 0$

On en déduit : $\varphi'''(x) > 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\varphi'''(x)$	+	+	
Variations de φ''	$-\infty$	0	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :

× tout d'abord : $\varphi''(1) = e^1 - \frac{1}{1^3} e^{\frac{1}{1}} = e - e = 0$.

× ensuite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} = 0 \times 1 = 0$. De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi''(x) = +\infty$.

× enfin : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. De plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi''(x) = -\infty$.

- On déduit le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$	-	0	+
Variations de φ'	$+\infty$	e	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :

× tout d'abord : $\varphi'(1) = e^1 - \left(\frac{1}{1} - 1\right) e^{\frac{1}{1}} = e$.

× ensuite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} = -1$. De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = +\infty$.

× enfin : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. De plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x) = +\infty$.

- La fonction φ' est :

× strictement décroissante sur $]0, 1]$,

× strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Elle admet donc un unique minimum en 1 égal à e.

On en déduit : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) \geq \varphi'(1) = e$.

□

4. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$.

- Ensuite, pour tout $x \in]0, +\infty[: x e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$. Avec le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \quad (\text{par croissances comparées})$$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

□

5. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x - x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}$$

Or :

× par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

× $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$.

- Pour tout $x \in]0, \infty[: \varphi(x) = x \frac{\varphi(x)}{x}$.

D'après le calcul de limite précédent : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

□

6. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3, +\infty[, \varphi(x) \geq e x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ .

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto \varphi(x) - e x$.

La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$h'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0 \quad (\text{d'après 2.})$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	3	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+		+
Variations de h	$-\infty$	$h(3)$	$+\infty$

- En particulier : $\forall x \in [3, +\infty[, h(x) \geq h(3)$. Or :

$$h(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 3e > 0$$

On en déduit, pour tout $x \in [3, +\infty[: h(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\varphi(x) \geq e x$.

Commentaire

On pouvait également démontrer cette inégalité en utilisant la convexité de φ .

- D'après la question 2. : $\forall x \in]1, +\infty[, \varphi''(x) > 0$.

La fonction φ est donc convexe sur $]1, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 3, droite d'équation :

$$y = \varphi'(3)(x - 3) + \varphi(3)$$

- Soit $x \in [3, +\infty[$.

Comme $\varphi'(3) \geq e$ (d'après la question 2.)

alors $\varphi'(3)(x - 3) \geq e(x - 3)$ (car $x - 3 \geq 0$)

d'où $\varphi'(3)(x - 3) + \varphi(3) \geq e(x - 3) + 15$ (car $\varphi(3) > 15$ d'après l'énoncé)

- De plus, comme $e < 3$:

$$e(x - 3) + 15 = ex - 3e + 15 \geq ex$$

Finalement : $\forall x \in [3, +\infty[, \varphi(x) \geq \varphi'(3)(x - 3) + \varphi(3) \geq ex$. □

7. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

Démonstration.

- La fonction φ'' est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

La fonction φ change donc de convexité en 1, seul point d'inflexion de la courbe représentative de φ .

- Les coordonnées de ce point d'inflexion sont $(1, \varphi(1))$. Or :

$$\varphi(1) = e^1 - 1e^{\frac{1}{1}} = e - e = 0$$

La courbe représentative de φ admet pour point d'inflexion, le point de coordonnées $(1, 0)$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de φ en 1 est :

$$y = \varphi'(1)(x - 1) + \varphi(1) = e(x - 1).$$

□

8. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

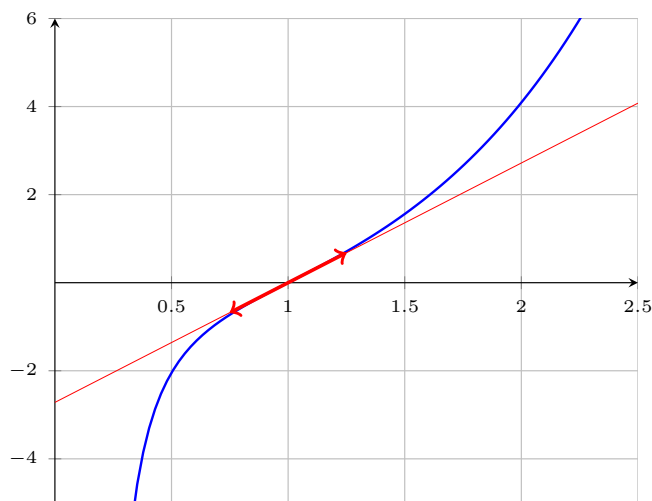
Démonstration.

- D'après la question 2. : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) \geq e > 0$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	+	⋮	+
Variations de φ	$-\infty$	$\downarrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

- L'obtention des différents éléments de ce tableau a été détaillée en questions 3 et 4.
- On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la représentation graphique suivante.



Commentaire

- Un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ est un point en lequel $\mathcal{C}$ change de convexité. Si la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I d'étude, une condition suffisante d'existence de point d'inflexion est que la fonction φ'' s'annule **en changeant de signe** en l'abscisse de ce point.
- L'énoncé demande de représenter la tangente au point d'inflexion. Il est important que le dessin de la courbe mette en évidence :
 - × la notion de tangente : la courbe de $\mathcal{C}$ et la tangente doivent apparaître comme confondues à proximité du point $(1, 0)$.
 - × la notion de point d'inflexion : sur $]0, 1[$ la fonction est concave et sur $]1, +\infty[$ la fonction est convexe. Cela doit apparaître clairement sur la représentation graphique. En particulier, la tangente obtenue « traverse » la courbe $\mathcal{C}$.

□

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ existe} \\ u_n \geq 3e^n \end{cases}$

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_0 = 3$. Or : $3e^0 = 3$. D'où : $u_0 \geq 3e^0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\begin{cases} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geq 3e^{n+1} \end{cases}$).

- Par hypothèse de récurrence, u_n existe et : $u_n \geq 3e^n$. En particulier : $u_n > 0$.
Donc $\varphi(u_n)$ est bien défini. On en déduit que u_{n+1} existe.

- Par hypothèse de récurrence : $u_n \geq 3e^n \geq 3$. Donc : $u_n \in [3, +\infty[$.
Alors, d'après la question 5. :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u_n) & \geq & e u_n \\ \parallel & & \forall \\ u_{n+1} & e \times 3e^n = & 3e^{n+1} \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$.

□

10. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente : $u_n \in [3, +\infty[$.
Ainsi, d'après la question 5. :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u_n) & \geq & e u_n \\ \parallel & & \forall \\ u_{n+1} & & u_n \end{array}$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

- Toujours d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3e^n$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^n = +\infty$.

Par théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

□

11. Écrire un programme **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.

Démonstration.

```

1  import numpy as np
2  n = 0
3  u = 3
4  while u < 10**3 :
5      u = np.exp(u) - u * np.exp(1/u)
6      n = n + 1
7  print(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**

On commence par importer la librairie **numpy** qui contient notamment la fonction **exp** utile ultérieurement.

La variable **n** est initialisée à 0.

La variable **u**, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) , est initialisée à $u_0 = 3$.

```
1 import numpy as np
2 n = 0
3 u = 3
```

- **Structure itérative**

Les lignes 4 à 6 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $u_n \geq 10^3$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $u_n < 10^3$. Pour cela on met en place une structure itérative (**while**) :

```
4 while u < 10**3 :
```

Tant que $u_n < 10^3$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable u :

```
5     u = np.exp(u) - u * np.exp(1/u)
```

On met alors à jour en conséquence la variable n : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1} .

```
6     n = n + 1
```

- **Fin du programme**

À l'issue de cette boucle, la variable n contient le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.

On affiche alors enfin la valeur de la variable n

```
7 print(n)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, écrire correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. □

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

12. Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq x^2$

Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 > x_0^2$.

Étudions la véracité de la proposition **1.**

En choisissant $x_0 = \frac{1}{2}$, on remarque : $x_0 > x_0^2$.

Ainsi la négation de la proposition **1.** est vraie.

La proposition **1.** est donc fausse.

Commentaire

- On démontre ici que la négation de la proposition **1.** est vraie. Cette négation est une proposition quantifiée existentiellement. Il faut donc exhiber un objet vérifiant cette proposition pour conclure quant à sa véracité.
- Notons que tout réel $x_0 \in]0, 1[$ constitue un contre-exemple valide. Cependant écrire :

~~On sait : $\forall x \in]0, 1[, x > x^2$. Ainsi la proposition **1.** est fausse.~~

est une erreur de logique grave. La proposition $(\forall x \in \mathbb{R}_+, x > x^2)$ n'a en effet pas de lien logique avec la proposition **1.** $(\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq x^2)$. En particulier, ces deux propositions ne sont pas la négation l'une de l'autre. Il s'agit ici d'une confusion entre les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

- Si l'on ne repère pas immédiatement un contre-exemple à la proposition **1.**, on peut tout de même conclure en cherchant à se ramener à une proposition équivalente pour laquelle l'étude de la véracité est plus simple. Cela donnerait la rédaction suivante.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Deux cas se présentent :

× si $x > 0$, alors :

$$x \leq x^2 \Leftrightarrow 1 \leq x$$

× si $x = 0$, alors l'inégalité est vérifiée (on a bien : $0 \leq 0^2$).

La proposition **1.** est donc équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, (x = 0) \text{ OU } (1 \leq x)$$

Cette proposition est fausse. En effet, en choisissant $x_0 = \frac{1}{2}$, on remarque :

$$x_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ ET } ((x_0 \neq 0) \text{ ET } (1 > x_0))$$

Deux propositions équivalentes ayant même valeur de vérité, la proposition **1.** est fausse. □

13. Tout réel positif de racine carrée supérieure ou égale à 2, est lui-même supérieur ou égal à 4.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x} \geq 2) \Rightarrow (x \geq 4)$

Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x_0} \geq 2) \text{ ET } (x_0 < 4)$.

Étudions la véracité de la proposition **2**.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Supposons : $\sqrt{x} \geq 2$.

Alors $(\sqrt{x})^2 \geq 2^2$ (par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$)

Ainsi $x \geq 4$

La proposition **2**. est donc vraie.

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Il s'agit essentiellement de mettre en place les structures de démonstration. En l'occurrence, il faut ici savoir démontrer :
 - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E, p(x)$
Soit $x \in E \dots$
 - × une implication : $p \Rightarrow q$
Supposons p et démontrons q .
- Précisons la manière d'agir.

1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
2 Supposons $\sqrt{x} \geq 2$. Alors :
3 ...
4 Ainsi : $x \geq 4$.

- × Les lignes 1 et 4 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration.
- × Il s'agit de démontrer une propriété quantifiée universellement en x . On commence donc en ligne 1 la démonstration par : « Soit $x \dots$ ».
- × La ligne 2 correspond à la structure de démonstration d'une implication.
On souhaite démontrer : $(\sqrt{x} \geq 2) \Rightarrow (x \geq 4)$. On commence donc par supposer $(\sqrt{x} \geq 2)$, puis on démontre, par implication, $(x \geq 4)$.

C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler.

- Le message est clair : sur les 4 lignes de rédaction, 3 proviennent de la présentation et seule 1 correspond à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

14. Le trinôme $z^2 - 3z + 2$ admet une racine réelle.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists z_0 \in \mathbb{R}, z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0$.

Sa négation est : $\forall z \in \mathbb{R}, z^2 - 3z + 2 \neq 0$.

Étudions la véracité de la proposition 3. En choisissant $z_0 = 1$, on remarque :

$$z_0^2 - 3z_0 + 2 = 1^2 - 3 + 2 = 1 - 1 = 0$$

La proposition 3. est donc vraie.

Commentaire

- La proposition 3. est une proposition quantifiée existentiellement. Il faut donc exhiber un objet vérifiant cette proposition pour conclure quant à sa véracité.
- Notons que le réel 2 pouvait également constituer un exemple valide.
- Si l'on ne repère pas immédiatement une racine réelle du trinôme $z^2 - 3z + 2$ (ce qui serait un tort puisqu'on rappelle qu'il est toujours pertinent de tester si les réels suivants sont racines évidentes : 0, 1, -1, 2, -2), on peut conclure quant à l'existence de racines réelles grâce au discriminant.

Notons Δ le discriminant de ce trinôme. Alors :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme étudié admet deux racines réelles que l'on note z_1 et z_2 .

Ainsi, z_1 (ou z_2) vérifie la proposition 3.. Cette dernière est donc vraie. □

15. La suite $(2n - \sqrt{5})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante :

$$\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1) - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5} + r.$$

Sa négation est : $\forall r \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, 2(n_0+1) - \sqrt{5} \neq 2n_0 - \sqrt{5} + r$.

Étudions la véracité de la proposition 4.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$2(n+1) - \sqrt{5} = 2n + 2 - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5} + 2$$

Ainsi, en choisissant $r = 2$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1) - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5} + r$$

La proposition 4. est donc vraie. □

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables. Toute réponse devra être justifiée.

16. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $(x^3 \leq 3)$ et $(|x| \leq 3^{\frac{1}{3}})$.

Démonstration.

- En choisissant $x_0 = -3$, on remarque que :
 - × la proposition $(x_0^3 \leq 3)$ est vraie. En effet : $(-3)^3 \leq 0 \leq 3$.
 - × la proposition $(|x_0| \leq 3^{\frac{1}{3}})$ est fausse. En effet : $|-3| = 3 = 3^1$. De plus :

$$\begin{aligned}
 1 &> \frac{1}{3} \\
 \text{donc } \ln(3) &> \frac{1}{3} \ln(3) \quad (\text{car } \ln(3) > 0) \\
 \text{d'où } e^{\ln(3)} &> e^{\frac{1}{3} \ln(3)} \quad (\text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}) \\
 \text{ainsi } 3 &> 3^{\frac{1}{3}} \\
 \text{enfin } |-3| &> 3^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

Comme les deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité pour chaque valeur de x , elles ne sont pas équivalentes.

Commentaire

- Comme toujours, il est possible de trouver un contre-exemple même sans la moindre inspiration. Pour cela, on peut commencer par chercher à démontrer l'équivalence entre les deux propositions.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
 - × si $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
 x^3 &\leq 3 \\
 \Leftrightarrow e^{3 \ln(x)} &\leq 3 \\
 \Leftrightarrow 3 \ln(x) &\leq \ln(3) \quad (\text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^*) \\
 \Leftrightarrow \ln(x) &\leq \frac{1}{3} \ln(3) \\
 \Leftrightarrow x &\leq 3^{\frac{1}{3}} \quad (\text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}) \\
 \Leftrightarrow |x| &\leq 3^{\frac{1}{3}} \quad (\text{car } x \geq 0)
 \end{aligned}$$

Les deux propositions sont donc bien équivalentes lorsque x est strictement positif.

Commentaire

× si $x \leq 0$, alors :

- la proposition $(x^3 \leq 3)$ est toujours vraie. En effet :

$$\text{comme } x \leq 0$$

$$\text{alors } x^3 \leq 0^3 \quad (\text{par croissance de la fonction } x \mapsto x^3 \text{ sur } \mathbb{R})$$

$$\text{donc } x^3 \leq 0 \leq 3$$

- cependant pour la proposition $(|x| \leq 3^{\frac{1}{3}})$, on obtient :

$$\begin{aligned} |x| \leq 3^{\frac{1}{3}} &\Leftrightarrow -3^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 3^{\frac{1}{3}} \\ &\Leftrightarrow -3^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 0 \quad (\text{car } x \leq 0) \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $x < -3^{\frac{1}{3}}$:

× la 1^{ère} proposition est vraie,

× la 2^{nde} est fausse.

Tout réel x strictement inférieur à $-3^{\frac{1}{3}}$ constituera donc un contre-exemple à l'équivalence de ces deux propositions pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

× L'implication suivante est fausse : $(x^3 \leq 3) \Rightarrow (|x| \leq 3^{\frac{1}{3}})$.

En effet, en reprenant le point précédent, pour $x_0 = -3$:

► $(x_0^3 \leq 3)$ est vraie

► $(|x_0| \leq 3^{\frac{1}{3}})$ est fausse.

Or l'assertion (**VRAI** $\Rightarrow$ **FAUX**) est fausse.

× Démontrons : $(|x| \leq 3^{\frac{1}{3}}) \Rightarrow (x^3 \leq 3)$.

Supposons : $|x| \leq 3^{\frac{1}{3}}$. Alors :

$$-3^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{donc } \left(-3^{\frac{1}{3}}\right)^3 \leq x^3 \leq \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 \quad (\text{par croissance de la fonction } x \mapsto x^3 \text{ sur } \mathbb{R})$$

$$\text{d'où } -3 \leq x^3 \leq 3$$

En particulier, on a bien : $x^3 \leq 3$.

□

17. Paramètre : $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$x < 1 \Leftrightarrow x \times x < x \times 1 \quad (\text{car } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 < x$$

Les deux propositions sont donc équivalentes pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

□

18. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Propositions : $(x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0)$ et $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0)$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$.

Le réel $\sum_{i=1}^n x_i^2$ est donc une somme nulle de termes positifs. On en déduit que chacun des termes est nul, c'est-à-dire : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^2 = 0$.

On en déduit : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$. (car 0 est le seul réel de carré égal à 0)

($\Leftarrow$) Supposons : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$. Alors :

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n 0^2 = \sum_{i=1}^n 0 = 0$$

Les deux propositions sont donc équivalentes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

□

19. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Propositions : $(x^2 + y^2 > 1)$ et $(|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1)$.

Démonstration.

• En choisissant $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, on remarque que :

× la proposition $(x^2 + y^2 > 1)$ est vraie. En effet :

$$x_0^2 + y_0^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 > 1$$

× la proposition $(|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1)$ est fausse. En effet : $|x_0| = |1| = 1 \not> 1$. De même pour y_0 .

Comme les deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité pour chaque valeur de (x, y) , elles ne sont pas équivalentes.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

× L'implication suivante est fausse : $(x^2 + y^2 > 1) \Rightarrow (|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1)$.

En effet, en reprenant le point précédent, pour $x_0 = y_0 = 1$:

▶ $(x_0^2 + y_0^2 > 1)$ est vraie

▶ $(|x_0| > 1 \text{ OU } |y_0| > 1)$ est fausse.

Or l'assertion (**VRAI** $\Rightarrow$ **FAUX**) est fausse.

× Démontrons : $(|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1) \Rightarrow (x^2 + y^2 > 1)$.

Supposons : $|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1$. Deux cas se présentent :

- ▶ si $|x| \geq 1$, alors, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $x^2 > 1$.
Or, on a toujours : $y^2 \geq 0$. Ainsi :

$$x^2 + y^2 \geq x^2 > 1$$

- ▶ si $|y| \geq 1$, alors, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $y^2 > 1$.
Or, on a toujours : $x^2 \geq 0$. Ainsi :

$$x^2 + y^2 \geq y^2 > 1$$

Dans les deux cas, on obtient bien : $x^2 + y^2 > 1$.

□

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

20. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Propositions : $P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0)$ et $Q(x, y) : (x = y)$.

Démonstration.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

($\Rightarrow$) L'implication $(P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))$ est fausse.

En effet, en choisissant $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$, on obtient :

× d'une part :

$$x_0^2 - y_0^2 = 1^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$$

× d'autre part : $x_0 \neq y_0$.

Ainsi le couple (x_0, y_0) vérifie : $P(x_0, y_0)$ ET NON($Q(x_0, y_0)$).

La proposition $Q(x, y)$ n'est donc pas une condition nécessaire à $P(x, y)$.

($\Leftarrow$) Supposons $Q(x, y) : x = y$. Alors :

$$x^2 = y^2$$

$$\text{donc } x^2 - y^2 = 0$$

D'où : $P(x, y)$.

La proposition $Q(x, y)$ est donc une condition suffisante à $P(x, y)$.

□

21. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $P(x) : (x \geq 0)$ et $Q(x) : (x \geq 1)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

• L'implication $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ est fausse.

En effet, en choisissant $x_0 = 0$, on obtient :

× d'une part : $x_0 = 0 \geq 0$,

× d'autre part : $x_0 = 0 < 1$.

Ainsi x_0 vérifie $P(x_0)$ ET NON($Q(x_0)$).

La proposition $Q(x)$ n'est donc pas une condition nécessaire à $P(x)$.

• Supposons $Q(x) : x \geq 1$.

Alors, par transitivité : $x \geq 1 \geq 0$.

D'où $P(x)$.

La proposition $Q(x)$ est donc une condition suffisante à $P(x)$.

□

22. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Propositions : $P(a, b, c) : (|a + b + c| = 0)$ et $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$.

Démonstration.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

($\Rightarrow$) L'implication $(P(a, b, c) \Rightarrow Q(a, b, c))$ est fausse.

En effet, en choisissant $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et $c_0 = -2$, on obtient :

× d'une part :

$$|a_0 + b_0 + c_0| = |1 + 1 - 2| = |0| = 0$$

× d'autre part : $a_0 \neq 0$.

Ainsi le triplet (a_0, b_0, c_0) vérifie : $P(a_0, b_0, c_0)$ ET NON($Q(a_0, b_0, c_0)$).

La proposition $Q(a, b, c)$ n'est donc pas une condition nécessaire à $P(a, b, c)$.

($\Leftarrow$) Supposons $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$. Alors :

$$|a + b + c| = |0 + 0 + 0| = |0| = 0$$

D'où : $P(a, b, c)$.

La proposition $Q(a, b, c)$ est donc une condition suffisante à $P(a, b, c)$. □

23. Paramètres : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Propositions : $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a) : (la\ suite\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}\ est\ arithmétique\ de\ raison\ a)$ et $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a) : (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n)$.

Démonstration.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Supposons $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a .

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \cancel{u_{n+1}} + a - \cancel{u_{n+1}} \quad (car\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}\ est\ arithmétique\ de\ raison\ a) \\ &= a \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \cancel{u_n} + a - \cancel{u_n} \quad (car\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}\ est\ arithmétique\ de\ raison\ a) \\ &= a \end{aligned}$$

Ainsi : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

D'où : $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$.

La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$ est donc une condition nécessaire à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$.

($\Leftarrow$) L'implication $(Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a) \Rightarrow P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a))$ est fausse.

En effet, en choisissant $a = 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$, on obtient :

× d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = (\textcolor{red}{n} + 2) - (\textcolor{red}{n} + 1) = 1$$

De plus :

$$u_{n+1} - u_n = (\textcolor{red}{n} + 1) - \textcolor{red}{n} = 1$$

Ainsi : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

× d'autre part, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique de raison $a = 0$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = n + 1 = u_n + 1 \neq u_n + 0$$

Ainsi, le couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$ vérifie : $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$ ET NON $(P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a))$.

La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$ n'est donc pas une condition suffisante à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$.

Commentaire

- Si les deux propositions de l'énoncé ne sont pas équivalentes, les deux suivantes le sont pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
 - × $p((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.
 - × $q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Commentaire

- En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 $(\Rightarrow)$ Supposons $p((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.
 Alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.
 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \cancel{u_{n+1}} + r - \cancel{u_{n+1}} && (\text{car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } r) \\ &= r \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \cancel{u_n} + r - \cancel{u_n} && (\text{car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } r) \\ &= r \end{aligned}$$

Ainsi : $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

D'où $q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

- $(\Leftarrow)$ Supposons $q((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.
 On pose alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$$

On remarque alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{(n+1)+1} - u_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = v_n$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante.

On en déduit qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = r$.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique (de raison r).

D'où $p((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$. □

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

24. $5^{3x+4} - 2^{2x-3} = 0$

26. $\sqrt{-x^2 + x + 3} \leq 2x + 1$

25. $|x + 1| + |2x + 1| = 0$

27. $|3 - 2x| \geq \sqrt{-2x^2 + x + 1}$

Démonstration.

24. Résolvons l'équation (1).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(1)}$.
Il n'y a aucun problème de définition dans cette équation.

Ainsi : $\mathcal{D}_{(1)} = \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 5^{3x+4} - 2^{2x-3} &= 0 &\Leftrightarrow 5^{3x+4} &= 2^{2x-3} \\
 &\Leftrightarrow e^{(3x+4) \ln(5)} &= e^{(2x-3) \ln(2)} \\
 &\Leftrightarrow (3x+4) \ln(5) &= (2x-3) \ln(2) &\quad (\text{par injectivité de } \exp \text{ sur } \mathbb{R}) \\
 &\Leftrightarrow 3x \ln(5) + 4 \ln(5) &= 2x \ln(2) - 3 \ln(2) \\
 &\Leftrightarrow 3x \ln(5) - 2x \ln(2) &= -4 \ln(5) - 3 \ln(2) \\
 &\Leftrightarrow (3 \ln(5) - 2 \ln(2)) x &= -4 \ln(5) - 3 \ln(2) \\
 &\Leftrightarrow x &= \frac{-4 \ln(5) - 3 \ln(2)}{3 \ln(5) - 2 \ln(2)}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (1) est donc : $\left\{ -\frac{4 \ln(5) + 3 \ln(2)}{3 \ln(5) - 2 \ln(2)} \right\}$.

25. Résolvons l'équation (2).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(2)}$.
Il n'y a aucun problème de définition dans cette équation.

Ainsi : $\mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
On résout l'équation (2) par disjonction de cas selon le signe des termes $(x + 1)$ et $(2x + 1)$.
× d'une part : $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.
× d'autre part :

$$2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

On obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x + 1$	$-$	$-$	0	$+$

Trois cas se présentent alors.

× Si $x \leq -1$, alors :

$$\begin{aligned} |x+1| + |2x+1| = 0 &\Leftrightarrow -(x+1) - (2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x-1-2x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 = 3x \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} = x \end{aligned}$$

Cependant $-\frac{2}{3} \notin]-\infty, -1]$. L'équation (2) n'admet donc pas de solution sur $]-\infty, -1]$.

× Si $x \in]-1, -\frac{1}{2}]$, alors :

$$\begin{aligned} |x+1| + |2x+1| = 0 &\Leftrightarrow (x+1) - (2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \cancel{x} - 2x - \cancel{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Cependant $0 \notin]-1, -\frac{1}{2}]$. L'équation (2) n'admet donc pas de solution sur $] -1, -\frac{1}{2}]$.

× si $x > -\frac{1}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} |x+1| + |2x+1| = 0 &\Leftrightarrow (x+1) + (2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1+2x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Cependant $-\frac{2}{3} \notin]-\frac{1}{2}, +\infty[$. L'équation (2) n'admet donc pas de solution sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (2) est : $\emptyset$.

26. Résolvons l'inéquation (3).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(3)}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'inéquation (3) est bien définie $\Leftrightarrow -x^2 + x + 3 \geq 0$

On note Δ le discriminant du trinôme $-X^2 + X + 3$. Alors :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 1 + 12 = 13$$

Le trinôme $-X^2 + X + 3$ admet donc deux racines réelles notées x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

On obtient alors le signe du trinôme $-x^2 + x + 3$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Signe de $-x^2 + x + 3$	$-$	0	$+$	$-$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(3)} = [x_1, x_2] = \left[-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right].$$

- Soit $x \in \left[-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right] = [x_1, x_2]$.

On procède par disjonction de cas selon le signe de $(2x+1)$ (car, comme une racine est toujours positive, on a toujours : $\sqrt{-x^2 + x + 3} \geq 0$).

On remarque :

$$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Cherchons si : $-\frac{1}{2} \in [x_1, x_2]$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \in [x_1, x_2] &\Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{13}}{2} \leq -\frac{1}{2} \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} \geq \frac{1}{2} \geq -\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ &\Leftrightarrow 1+\sqrt{13} \geq 1 \geq 1-\sqrt{13} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{13} \geq 0 \geq -\sqrt{13} \end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie. Par raisonnement par équivalence, la première aussi.

$$\text{On en déduit : } -\frac{1}{2} \in [x_1, x_2].$$

Deux cas se présentent alors.

- × si $x \in [x_1, -\frac{1}{2}]$, alors : $2x+1 < 0$.

Or on a toujours : $\sqrt{-x^2 + x + 3} \geq 0$. Ainsi :

$$\sqrt{-x^2 + x + 3} \geq 0 > 2x+1$$

L'inéquation (3) n'admet donc aucune solution sur $[x_1, -\frac{1}{2}]$.

- × si $x \in [-\frac{1}{2}, x_2]$, alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{-x^2 + x + 3} \leq 2x+1 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{-x^2 + x + 3}\right)^2 \leq (2x+1)^2 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x + 3 \leq 4x^2 + 4x + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 5x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

On remarque que -1 est racine évidente du polynôme $5X^2 + 3X - 2$. On en déduit la factorisation :

$$5X^2 + 3X - 2 = 5(X - (-1)) \left(X - \frac{2}{5}\right) = 5(X+1) \left(X - \frac{2}{5}\right)$$

On obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
Signe de $5x^2 + 3x - 2$	+	0	0	+

Sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, x_2]$, l'ensemble des solutions de **(3)** est donc :

$$\begin{aligned}
 & \left(]-\infty, -1] \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty[\right) \cap \left[-\frac{1}{2}, x_2\right] \right. \\
 = & \left(]-\infty, -1] \cap \left[-\frac{1}{2}, x_2\right] \right) \cup \left(\left[\frac{2}{5}, +\infty[\cap \left[-\frac{1}{2}, x_2\right] \right) \quad (\text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup) \\
 = & \emptyset \cup \left(\left[\frac{2}{5}, +\infty[\cap \left[-\frac{1}{2}, x_2\right] \right) \\
 = & \left[\frac{2}{5}, +\infty[\cap \left[-\frac{1}{2}, x_2\right]
 \end{aligned}$$

Pour expliciter cette intersection, il reste à déterminer si $\frac{2}{5} \in [-\frac{1}{2}, x_2]$.

On a bien : $-\frac{1}{2} \leq \frac{2}{5}$. Démontrons alors : $\frac{2}{5} \leq x_2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{5} \leq x_2 & \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\
 & \Leftrightarrow 4 \leq 5(-1 + \sqrt{13}) \\
 & \Leftrightarrow 4 \leq -5 + 5\sqrt{13} \\
 & \Leftrightarrow 9 \leq 5\sqrt{13} \\
 & \Leftrightarrow \frac{9}{5} \leq \sqrt{13} \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^2 \leq (\sqrt{13})^2 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+) \\
 & \Leftrightarrow \frac{81}{25} \leq 13 \\
 & \Leftrightarrow 81 \leq 25 \times 13
 \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie (en effet : $25 \times 13 \geq 25 \times 10 = 250 \geq 81$). Par raisonnement par équivalence, la première aussi. On en déduit :

$$\left[\frac{2}{5}, +\infty[\cap \left[-\frac{1}{2}, x_2\right] = \left[\frac{2}{5}, x_2\right]$$

Finalement, l'ensemble des solutions de **(3)** est : $\left[\frac{2}{5}, x_2\right] = \left[\frac{2}{5}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right]$.

Commentaire

On rappelle : $u \leq v \not\Rightarrow u^2 \leq v^2$.

En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| \leq |v| \Leftrightarrow u^2 \leq v^2)$$

C'est pourquoi on procède par disjonction de cas pour résoudre cette inéquation, en fonction du signe des quantités que l'on considère (ici $\sqrt{-x^2 + x + 3}$ et $(2x + 1)$).

27. Résolvons l'inéquation (4).

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(4)}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'inéquation (4) est bien définie $\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 \geq 0$

Le réel 1 est racine évidente du polynôme $-2X^2 + X + 1$. On en déduit la factorisation suivante :

$$-2X^2 + X + 1 = -2 \left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \right) = -2(X - 1) \left(X + \frac{1}{2} \right)$$

On obtient alors le signe du trinôme $-2x^2 + x + 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
Signe de $-2x^2 + x + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(4)} = \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

- Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\begin{aligned} |3 - 2x| \geq \sqrt{-2x^2 + x + 1} &\Leftrightarrow (|3 - 2x|)^2 \geq \left(\sqrt{-2x^2 + x + 1}\right)^2 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow (3 - 2x)^2 \geq -2x^2 + x + 1 \\ &\Leftrightarrow 9 - 12x + 4x^2 \geq -2x^2 + x + 1 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 8 \geq 0 \end{aligned}$$

On note Δ le discriminant du polynôme $6X^2 - 13X + 8$. Alors :

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 6 \times 8 = 169 - 4 \times 48 = 169 - 192 < 0$$

Le polynôme $6X^2 - 13X + 8$ n'admet pas de racine et son coefficient dominant est strictement positif. On en déduit que l'assertion $(6x^2 - 13x + 8 \geq 0)$ est toujours vraie.

Par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est également.

$$\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de (4) est : } \mathcal{D}_{(4)} = \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

□

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$$

28. (*) Rappeler l'expression de S_n en fonction de n et la démontrer.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

► **Initialisation**

- D'une part : $\sum_{k=0}^0 k = 0$.
- D'autre part : $\frac{0(0+1)}{2} = 0$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=0}^n k \right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n+1}{2}(n+2) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Commentaire

Notons que cette question est une pure question de cours. Il est inconcevable de ne pas savoir la traiter parfaitement.

□

29. En déduire une expression de T_n en fonction de n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \times \frac{(j-1)((j-\textcolor{red}{X})+\textcolor{red}{X})}{2} \right) \quad (\text{d'après la question précédente}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\textcolor{red}{j}} \frac{(j-1)\textcolor{red}{j}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j-1) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k \quad (\text{avec le décalage d'indice } k = j-1) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{(n-1)((n-\textcolor{red}{X})+\textcolor{red}{X})}{2} \quad (\text{d'après la question précédente})
 \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_n = \frac{(n-1)n}{4}$.

Commentaire

Rappelons qu'il y a deux manières d'écrire la double somme $T_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$:

- d'une part :

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n \frac{i}{j} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j} \right)$$

- d'autre part :

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right)$$

Il reste à choisir laquelle de ces deux expressions est pertinente pour la résolution de l'exercice.

Dans notre cas, il est possible de calculer la somme $\sum_{i=0}^{j-1} i$ mais pas la somme $\sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j}$. C'est pour cela que l'on a opté pour l'utilisation de la 2^{nde} expression. □

Exercice 7

30. Montrer que la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Démonstration.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n!$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)! - n! = (n+1) \times n! - n! = n! \times ((n+1) - 1) = n! \times n > 0$$

La suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

□

31. Montrer que, pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $n!$ est un nombre pair.

Démonstration.

Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. On sait :

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \prod_{i=3}^n i \quad (\text{car } n \geq 2)$$

Ainsi, en notant $k = \prod_{i=3}^n i$, on remarque :

× tout d'abord : $k \in \mathbb{N}$ (car k est un produit d'entiers naturels).

× ensuite : $n! = 2 \times k$

On en déduit que, pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $n!$ est pair.

Commentaire

Revenons sur l'écriture :

$$\prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \prod_{i=3}^n i$$

Celle-ci n'est bien valable que pour $n \geq 2$. En effet :

× si $n = 0$, alors :

$$\prod_{i=1}^0 i = \prod_{i \in \emptyset} i = 1$$

× si $n = 1$, alors :

$$\prod_{i=1}^1 i = 1$$

Notons que cette écriture est bien vraie pour $n = 2$:

$$\prod_{i=3}^2 i = \prod_{i \in \emptyset} i = 1$$

Ainsi :

$$\prod_{i=1}^2 i = 1 \times 2 = 1 \times 2 \times \prod_{i=3}^2 i$$

□

On admettra par la suite que pour tout $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, $n!$ est un multiple de 3.

32. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a \leq b$.

a) Exprimer le quotient $\frac{b!}{a!}$ comme produit explicite d'entiers naturels.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{b!}{a!} &= \frac{\prod_{i=1}^b i}{\prod_{i=1}^a i} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^a \cancel{i} \times \prod_{i=a+1}^b i}{\prod_{i=1}^a \cancel{i}} \quad (\text{car } a \leq b) \\ &= \prod_{i=a+1}^b i \end{aligned}$$

$$\frac{b!}{a!} = \prod_{i=a+1}^b i$$

Commentaire

Notons que si $a = b$, on a bien :

× d'une part : $\frac{b!}{a!} = \frac{b!}{b!} = 1$.

× d'autre part : $\prod_{i=a+1}^b i = \prod_{i=b+1}^b i = \prod_{i \in \emptyset} i = 1$.

L'égalité $\frac{b!}{a!} = \prod_{i=a+1}^b i$ est donc toujours bien vérifiée.

□

b) Que peut-on en déduire sur le réel $\frac{b!}{a!}$?

Démonstration.

D'après la question précédente, $\frac{b!}{a!}$ est un produit d'entiers.

On en déduit que le réel $\frac{b!}{a!}$ est un entier.

□

33. Démontrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.

Démonstration.

On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.

Trois cas se présentent.

- si $c \in \{0, 1\}$, alors :

$$b! = c! + 2 = 1 + 2 = 3$$

Absurde ! En effet, la fonction $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et $2! = 2$ et $3! = 6$. Il n'existe donc pas d'entier b tel que : $b! = 3$.

- si $c = 2$, alors :

$$b! = c! + 2 = 2 + 2 = 4$$

Absurde ! En effet, la fonction $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et $2! = 2$ et $3! = 6$. Il n'existe donc pas d'entier b tel que : $b! = 4$.

- si $c \geq 3$, alors :

× on remarque tout d'abord : $b! = c! + 2 > c!$.

Or, d'après la question **1.**, la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. On en déduit : $b > c$.

Ainsi : $b \geq c \geq 3$.

× D'après la question **3.b)**, on en déduit que $\frac{b!}{3!}$ et $\frac{c!}{3!}$ sont des entiers.

Or :

$$b! = c! + 2$$

$$\text{donc} \quad \frac{b!}{3!} = \frac{c!}{3!} + \frac{2}{3!}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{b!}{6} - \frac{c!}{6} = \frac{2}{6}$$

$$\text{ainsi} \quad \frac{b!}{6} - \frac{c!}{6} = \frac{1}{3}$$

Comme $\frac{b!}{6}$ et $\frac{c!}{6}$ sont des entiers, alors $\frac{1}{3} = \frac{b!}{6} - \frac{c!}{6}$ est un entier.

Absurde !

Finalement, il n'existe pas de couple $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.

□