

DS1 /120

Exercice 1 /37

On considère l'application $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. (*) Démontrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

• 2 pts

2. On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$. Calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$.

• 1 pt : $\varphi' : x \mapsto e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}}$

• 1 pt : $\varphi'' : x \mapsto e^x - \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$

• 1 pt : $\varphi''' : x \mapsto e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$

3. (*) Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.

En déduire le sens de variation de φ' , et montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) \geq e$.

• 1 pt : pour tout $x \in]0, +\infty[, \varphi'''(x) > 0$ donc φ'' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

• 1 pt : $\varphi''(1) = 0$

• 1 pt :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$	-	0	+
Variations de φ'	$+\infty$	e	$+\infty$

• 1 pt : φ' admet un minimum en 1 et $\varphi'(1) = e$ donc pour tout $x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) \geq e$

4. (*) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

• 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées

• 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$

5. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$

• 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

6. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3, +\infty[, \varphi(x) \geq e x$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ .

• 1 pt : On note $h : x \mapsto \varphi(x) - e x$. La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$.

• 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, h'(x) \geq 0$.

• 1 pt : $\forall x \in [3, +\infty[, h(x) \geq h(3)$

• 1 pt : $h(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 3e > 0$

7. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

• 1 pt : La fonction φ'' est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$, la fonction φ change donc de convexité en 1, seul point d'inflexion de la courbe représentative de φ

• 1 pt : La courbe représentative de φ admet pour point d'inflexion, le point de coordonnées $(1, 0)$

• 1 pt : L'équation de la tangente à la courbe représentative de φ en 1 est :

$$y = \varphi'(1)(x - 1) + \varphi(1) = e(x - 1)$$

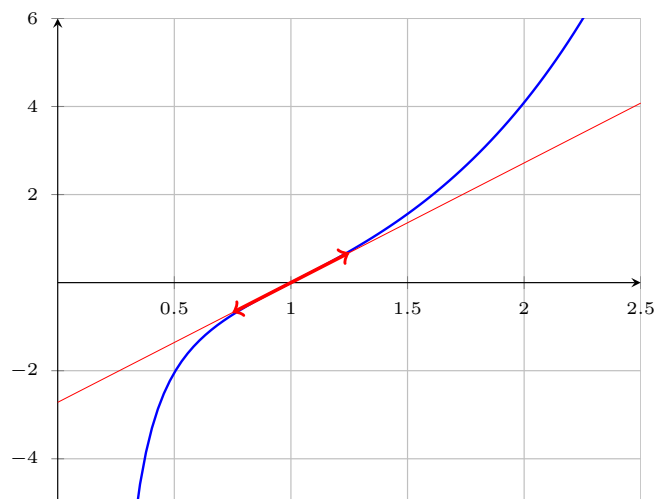
8. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.

Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

• 1 pt :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	+		+
Variations de φ	$-\infty$	0	$+\infty$

• 4 pts : (1 pt tangente, 1 point concavité/convexité, 1 pt limites, 1 pt croissance)



Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

9. (*) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

- 1 pt : initialisation
- 2 pt : hérédité

0 pt en cas de mauvaise rédaction de la récurrence

10. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

- 1 pt : $u_n \in [3, +\infty[$ donc on peut utiliser la question 5.
- 1 pt : $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq eu_n \geq u_n$
- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3e^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par théorème de comparaison

11. (*) Écrire un programme **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.

```
1 import numpy as np
2 n = 0
3 u = 3
4 while u < 10**3 :
5     u = np.exp(u) - u * np.exp(1/u)
6     n = n + 1
7 print(n)
```

- 1 pt : importation numpy
- 1 pt : initialisation n et u
- 1 pt :

```
4 while u < 10**3 :
```

- 1 pt : mise à jour u
- 1 pt : mise à jour n
- 1 pt :

```
7 print(n)
```

0 en cas d'erreur d'indentation

Exercice 2 /13

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

12. (*) Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq x^2$
- 1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 > x_0^2$
- 1 pt : En choisissant $x_0 = \frac{1}{2}$, on remarque : $x_0 > x_0^2$. Ainsi la négation de la proposition 1. est vraie. La proposition 1. est donc fausse.

13. Tout réel positif de racine carrée supérieure ou égale à 2, est lui-même supérieur ou égal à 4.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x} \geq 2) \Rightarrow (x \geq 4)$
- 1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, (\sqrt{x_0} \geq 2) \text{ ET } (x_0 < 4)$
- 2 pts : démonstration de 2.
 - × 1 pt : structure d'implication
 - × 1 pt : par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$

14. Le trinôme $z^2 - 3z + 2$ admet une racine réelle.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists z_0 \in \mathbb{R}, z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0$
- 1 pt : Sa négation est : $\forall z \in \mathbb{R}, z^2 - 3z + 2 \neq 0$
- 1 pt : En choisissant $z_0 = 1$, on remarque que la proposition 3. est vraie.

15. La suite $(2n - \sqrt{5})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

- 1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1) - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5} + r$
- 1 pt : Sa négation est : $\forall r \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, 2(n_0+1) - \sqrt{5} \neq 2n_0 - \sqrt{5} + r$
- 1 pt : La suite $(2n - \sqrt{5})_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2

Exercice 3 /14

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables. Toute réponse devra être justifiée.

16. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $(x^3 \leq 3)$ et $(|x| \leq 3^{\frac{1}{3}})$.

- 3 pts : en choisissant $x_0 = -3$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes
 - × 1 pt : $(x_0^3 \leq 3)$ est vraie
 - × 2 pts : $(|x_0| \leq 3^{\frac{1}{3}})$ est fausse (dont 1 pt pour la stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$)
- 1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x^3 \leq 3) \Rightarrow (|x| \leq 3^{\frac{1}{3}})$.
- 2 pts : $(|x| \leq 3^{\frac{1}{3}}) \Rightarrow (x^3 \leq 3)$
 - × 1 pt : structure de démonstration de l'implication
 - × 1 pt : par croissance de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$

17. Paramètre : $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

- 1 pt : les deux propositions sont équivalentes pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

18. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Propositions : $(x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0)$ et $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0)$

- 3 pts : les deux propositions sont équivalentes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
 - × 1 pt : structure de démonstration de la double implication
 - × 1 pt : $(\Rightarrow)$
 - × 1 pt : $(\Leftarrow)$

19. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Propositions : $(x^2 + y^2 > 1)$ et $(|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1)$.

- 1 pt : en choisissant $x_0 = y_0 = 1$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes
- 1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x^2 + y^2 > 1) \Rightarrow (|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1)$
- 2 pts : $(|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1) \Rightarrow (x^2 + y^2 > 1)$
 - × 1 pt : structure de démonstration de l'implication et disjonction de cas
 - × 1 pt : reste de la démonstration

Exercice 4 /9

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

20. (*) Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Propositions : $P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0)$ et $Q(x, y) : (x = y)$.

- 1 pt : La proposition $Q(x, y)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(x, y)$.
En effet, en choisissant $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$, ...
- 1 pt : La proposition $Q(x, y)$ est une condition suffisante à $P(x, y)$.

21. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.

Propositions : $P(x) : (x \geq 0)$ et $Q(x) : (x \geq 1)$.

- 1 pt : La proposition $Q(x)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(x)$.
En choisissant $x_0 = 0$, ...
- 1 pt : La proposition $Q(x)$ est une condition suffisante à $P(x)$

22. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Propositions : $P(a, b, c) : (|a + b + c| = 0)$ et $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$.

- 1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(a, b, c)$.
En effet, en choisissant $a_0 = b_0 = 1$ et $c_0 = -2$, ...
- 1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ est une condition suffisante à $P(a, b, c)$.

23. Paramètres : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Propositions : $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a) : (\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } a)$ et $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a) : (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n)$.

- 1 pt : La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$ est une condition nécessaire à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$.
- 2 pts : La proposition $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$ n'est pas une condition suffisante à $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a)$.
En effet, en choisissant $a = 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$, ...

Exercice 5 /26

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

24. $5^{3x+4} - 2^{2x-3} = 0$

26. $\sqrt{-x^2 + x + 3} \leq 2x + 1$

25. $|x + 1| + |2x + 1| = 0$

27. $|3 - 2x| \geq \sqrt{-2x^2 + x + 1}$

24. • 1 pt : $\mathcal{D}_{(1)} = \mathbb{R}$

• 1 pt : écriture sous forme exp / ln

• 1 pt : injectivité de exp sur $\mathbb{R}$

• 1 pt : l'ensemble des solutions de (1) est : $\{-\frac{4\ln(5) + 3\ln(2)}{3\ln(5) - 2\ln(2)}\}$.

25. • 1 pt : $\mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}$

• 1 pt : obtention de la disjonction de cas $x \leq -1$, $x \in]-1, -\frac{1}{2}]$, $x > -\frac{1}{2}$.

• 3 pts : l'ensemble des solutions de (2) est $\emptyset$ (1 pt par cas)

26. • 2 pts : $\mathcal{D}_{(3)} = [x_1, x_2] = [-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$

• 2 pts : obtention de la disjonction de cas $x \in [x_1, -\frac{1}{2}[$, $x \in [-\frac{1}{2}, x_2]$ (démonstration de $-\frac{1}{2} \in [x_1, x_2]$)

• 1 pt : L'inéquation (3) n'admet donc aucune solution sur $[x_1, -\frac{1}{2}[$.

• 1 pt : (3) $\Leftrightarrow 0 \leq 5x^2 + 3x - 2$ (par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$)

• 1 pt : les racines de $5X^2 + 3X - 2$ sont -1 et $\frac{2}{5}$

• 1 pt : Sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, x_2]$, l'ensemble des solutions de (3) est donc : $(]-\infty, -1] \cup [\frac{2}{5}, +\infty[) \cap [-\frac{1}{2}, x_2]$

• 1 pt : $(]-\infty, -1] \cup [\frac{2}{5}, +\infty[) \cap [-\frac{1}{2}, x_2] = [\frac{2}{5}, +\infty[\cap [-\frac{1}{2}, x_2]$

• 2 pts : $[\frac{2}{5}, +\infty[\cap [-\frac{1}{2}, x_2] = [\frac{2}{5}, x_2]$ (démonstration de $\frac{2}{5} \in [-\frac{1}{2}, x_2]$)

• 1 pt : l'ensemble des solutions de (3) est : $[\frac{2}{5}, x_2] = [\frac{2}{5}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$.

27. • 2 pts : $\mathcal{D}_{(4)} = [-\frac{1}{2}, 1]$

× 1 pt : les racines de $-2X^2 + X + 1$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$

× 1 pt : signe du trinôme

• 1 pt : (4) $\Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 8 \geq 0$ (par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+^*$)

• 1 pt : le polynôme $6X^2 - 13X + 8$ n'admet pas de racine et son coefficient dominant est strictement positif. On en déduit que l'assertion ($6x^2 - 13x + 8 \geq 0$) est toujours vraie.

Par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est également.

• 1 pt : l'ensemble des solutions de (4) est : $\mathcal{D}_{(4)} = [-\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 6 /10

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$$

28. (*) Rappeler l'expression de S_n en fonction de n et la démontrer.

- 1 pt : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
- 3 pts : récurrence
 - × 1 pt : initialisation
 - × 2 pts : hérédité

0 pt en cas de mauvaise rédaction de la récurrence

29. En déduire une expression de T_n en fonction de n .

- 1 pt : $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right)$
- 1 pt : $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right)$
- 1 pt : $\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \times \frac{(j-1)((j-\textcolor{red}{J})+\textcolor{red}{J})}{2} \right)$ (d'après la question précédente)
- 1 pt : $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k$ (avec le décalage d'indice $k = j-1$)
- 1 pt : $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2} \times \frac{(n-1)((n-\textcolor{red}{J})+\textcolor{red}{J})}{2}$ (d'après la question précédente)
- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{(n-1)n}{4}$

Exercice 7 /11

30. Montrer que la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- 1 pt

31. Montrer que, pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $n!$ est un nombre pair.

- 1 pt : si $n \geq 2$, alors : $n! = 1 \times 2 \times \prod_{i=3}^n i$.
- 1 pt : $k = \prod_{i=3}^n i \in \mathbb{N}$

On admettra par la suite que pour tout $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, $n!$ est un multiple de 3.

32. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a \leq b$.

a) Exprimer le quotient $\frac{b!}{a!}$ comme produit explicite d'entiers naturels.

- 1 pt : $\frac{b!}{a!} = \prod_{i=a+1}^b i$

b) Que peut-on en déduire sur le réel $\frac{b!}{a!}$?

- 1 pt : D'après la question précédente, $\frac{b!}{a!}$ est un produit d'entiers.

On en déduit que le réel $\frac{b!}{a!}$ est un entier.

33. Démontrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.

- 1 pt : structure de raisonnement par l'absurde

- 1 pt : cas $c \in \{0, 1\}$

- 1 pt : cas $c = 2$

- 3 pts : cas $c \geq 3$

× 1 pt : $b > c$ par stricte croissance de $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$

× 1 pt : comme $b \geq c \geq 3$, d'après la question 3.b), on en déduit que $\frac{b!}{3!}$ et $\frac{c!}{3!}$ sont des entiers.

× 1 pt : $\frac{1}{3} = \frac{b!}{6} - \frac{c!}{6}$ est un entier.

Absurde !