

DS1



On traitera **OBLIGATOIREMENT** les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 10. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. (*) Démontrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$. Calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$.
3. (*) Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ' , et montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) \geq e$.
4. (*) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
5. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3, +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ .
7. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
8. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

9. (*) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 3e^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)
10. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
11. (*) Écrire un programme **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

12. (*) Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré.
13. Tout réel positif de racine carrée supérieure ou égale à 2, est lui-même supérieur ou égal à 4.
14. Le trinôme $z^2 - 3z + 2$ admet une racine réelle.
15. La suite $(2n - \sqrt{5})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables. Toute réponse devra être justifiée.

16. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^3 \leq 3)$ et $(|x| \leq 3^{\frac{1}{3}})$.
17. Paramètre : $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.
18. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Propositions : $(x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0)$ et $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0)$
19. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $(x^2 + y^2 > 1)$ et $(|x| > 1 \text{ OU } |y| > 1)$.

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

20. (*) Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Propositions : $P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0)$ et $Q(x, y) : (x = y)$.
21. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x) : (x \geq 0)$ et $Q(x) : (x \geq 1)$.
22. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c) : (|a + b + c| = 0)$ et $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$.
23. Paramètres : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a) : (\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } a)$ et $Q((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, a) : (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

24. (*) $5^{3x+4} - 2^{2x-3} = 0$

26. $\sqrt{-x^2 + x + 3} \leq 2x + 1$

25. $|x + 1| + |2x + 1| = 0$

27. (*) $|3 - 2x| \geq \sqrt{-2x^2 + x + 1}$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$$

28. (*) Rappeler l'expression de S_n en fonction de n et la démontrer.

29. En déduire une expression de T_n en fonction de n .

Exercice 7

30. Montrer que la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

31. Montrer que, pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $n!$ est un nombre pair.

On admettra par la suite que pour tout $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, $n!$ est un multiple de 3.

32. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a \leq b$.

a) Exprimer le quotient $\frac{b!}{a!}$ comme produit explicite d'entiers naturels.

b) Que peut-on en déduire sur le réel $\frac{b!}{a!}$?

33. Démontrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.