DS9 /80

I. Exercice 1 /32

Question de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

- **2 pts :** $u_n = \left(u_1 - \dfrac{b}{1-a}\right) a^{n-1} + \dfrac{b}{1-a}$

b) Préciser le comportement de u à l'infini.

- **1 pt : si** $|a| < 1$**, alors :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{b}{1-a}$
- **1 pt : si** $a > 1$**, alors :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ **suivant le signe de** $u_1 - \dfrac{b}{1-a}$
- **1 pt : ai** $a < -1$**, alors** (u_n) **diverge par absence de limite.**

*****

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.

Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

- **1 pt :** $T_n(\Omega) = [\![1, \min(n,N)]\!]$

3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

- **1 pt :** T_1 **est la v.a.r. constante égale à** 1
- **2 pts : loi de** T_2
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\, \{T_2 = 1\} \,\big) = \dfrac{1}{N}$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\, \{T_2 = 2\} \,\big) = 1 - \dfrac{1}{N}$

Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$**.**

4. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}\big(\, \{T_n = 1\} \,\big)$ et $\mathbb{P}\big(\, \{T_n = 2\} \,\big)$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}\big(\, \{T_n = 1\} \,\big) = \dfrac{1}{N^{n-1}}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\, \{T_n \leqslant 2\} \,\big) = \dbinom{N}{2} \dfrac{2^n}{N^n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\, \{T_n = 2\} \,\big) = \dbinom{N}{2} \dfrac{2^n - 2}{N^n} = \dfrac{(N-1)\left(2^{n-1}-1\right)}{N^{n-1}}$

5. Calculer $\mathbb{P}(\ \{T_n = n\}\ )$.
On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

- **1 pt : si $n > N$: $\mathbb{P}(\ \{T_n = n\}\ ) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$**
- **1 pt : si $n \geqslant N$: $\mathbb{P}(\ \{T_n = n\}\ ) = \dfrac{N\,(N-1)\cdots\big(N-(n-1)\big)}{N^n} = \dfrac{N!}{(N-n)!\,N^n}$**

6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(\ \{T_{n+1} = k\}\ ) = \frac{k}{N}\ \mathbb{P}(\ \{T_n = k\}\ ) + \frac{N-k+1}{N}\ \mathbb{P}(\ \{T_n = k-1\}\ )$$

- **1 pt : FPT sur le SCE $\big(\ \{T_n = i\}\ \big)_{i\in[\![1,n]\!]}$**
- **1 pt : $\forall i \notin \{k-1, k\}$, $\mathbb{P}_{\{T_n=i\}}(\ \{T_{n+1} = k\}\ ) = 0$**
- **1 pt : $\mathbb{P}_{\{T_n=k-1\}}(\ \{T_{n+1} = k\}\ ) = \dfrac{N-(k-1)}{N}$**
- **1 pt : $\mathbb{P}_{\{T_n=k\}}(\ \{T_{n+1} = k\}\ ) = \dfrac{k}{N}$**

7. On considère dans cette question la fonction G_n suivante :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\ \{T_n = k\}\ ) x^k$$

a) Montrer que $G_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\ \{T_n = k\}\ ) x^k$.

- **1 pt : comme $T_n(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$: $\forall k \notin [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\ \{T_n = k\}\ ) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$**

b) Démontrer que la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $G_n'(1)$ en fonction de X_n.

- **1 pt : G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynomiale**
- **1 pt : $G_n'(1) = \mathbb{E}(T_n)$**

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\,(x - x^2)\,G_n'(x) + xG_n(x)$$

- **2 pts**

d) En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}\,(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\,(T_n) + 1$$

- **1 pt : $G_{n+1}'(x) = \dfrac{1}{N}\ (1-2x)\ G_n'(x) + \dfrac{1}{N}\ (x-x^2)\ G_n''(x) + G_n(x) + x\,G_n'(x)$**
- **1 pt : évaluation en 1 et utilisation de la question précédente pour obtenir le résultat**

e) En déduire la valeur de $\mathbb{E}\,(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : on applique la question *1a* pour $a = 1 - \dfrac{1}{N}$ et $b = 1$: $\mathbb{E}(T_n) = N - \dfrac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$**
- **1 pt : d'après *1b* : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = N$**

f) Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ cas est pleine, 0 sinon.

- **2 pts : pour tout** $i \in [\![1, N]\!]$**,** $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n\right)$
- **1 pt :** $T_n = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

II. Exercice 2 /21

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad (\star)$$

8. On pose alors $v = u - \mathrm{id}_E$ et $w = u - 2\,\mathrm{id}_E$.

a) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

- **1 pt :** $v - w = \mathrm{id}_E$
- **1 pt :** $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$

b) Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

- **1 pt :** $v \circ w = 0_{\mathscr{L}(E)} = w \circ v$

c) Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

- **1 pt**

d) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

- **1 pt :** $E = \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Ker}(w)$
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w) = \{0_E\}$

9. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

- **1 pt : on note $\mathscr{B}_1$ une base de** $\mathrm{Ker}(v)$ **et $\mathscr{B}_2$ une base de** $\mathrm{Ker}(w)$**. Comme, d'après la question précédent,** $\mathrm{Ker}(v)$ **et** $\mathrm{Ker}(w)$ **sont supplémentaires, alors la concaténation $\mathscr{B}$ de $\mathscr{B}_1$ et de $\mathscr{B}_2$ forme une base de E**
- **1 pt : dans une telle base $\mathscr{B}$, la matrice de u est diagonale. En effet...**

10. **Application**
Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. On fera apparaître les calculs sur la copie.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{id}_E) = U^3 - 3\,U + 2\,I_3$
- **1 pt :** $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- **1 pt : par injectivité de** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$

b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question *8*, dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\text{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\text{Ker}(w)$.

- **4 pts : $\mathscr{B}_1 = e_1 + e_3$ (peu importe la méthode)**
  - × **par résolution de système**
    - **- 1 pt :** $t \in \text{Ker}(v) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$
    - **- 1 pt :** $\cdots \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$
    - **- 1 pt :** $\text{Ker}(v) = \text{Vect}\,(e_1 + e_3)$
    - **- 1 pt :** $\mathscr{B}_1 = (e_1 + e_3)$ **est une base de** $\text{Ker}(v)$
  - × **par lecture matricielle**
    - **- 1 pt : théorème du rang**
    - **- 1 pt :** $\text{rg}(U) = 2$
    - **- 1 pt :** $e_1 + e_3 \in \text{Ker}(v)$**. En effet...**
    - **- 1 pt :** $\mathscr{B}_1 = (e_1 + e_3)$ **est une base de** $\text{Ker}(v)$
- **2 pts :** $\mathscr{B}_2 = (e_1 + e_2, e_3)$ **est une base de** $\text{Ker}(w)$

d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

- **1 pt : formule de changement de base**
- **1 pt :** P **est la matrice de passage de** $\mathscr{B}$ **dans** $\mathcal{C} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$**, *i.e.* :** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

III. Exercice 3 /27

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

11. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

- **1 pt : cas** $x = 0$
- **1 pt : cas** $x < 0$

12. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

- **2 pts :** (u_{2p}) **croissante**
  - × **1 pt :** $u_{2(p+1)} - u_{2p} = \dfrac{1}{(2p+1)^x} - \dfrac{1}{(2p+2)^x}$
  - × **1 pt :** $u_{2(p+1)} - u_{2p} \geqslant 0$
- **1 pt :** (u_{2p+1}) **décroissante**
- **1 pt :** $u_{2p} - u_{2p-1} = -\dfrac{1}{(2p)^x} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

- **1 pt : propriété de recouvrement + définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = S(x)$**

c) Justifier alors que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

- **1 pt : la suite (u_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{1+n}}{n^x}$.**

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

- **1 pt : (u_{2p}) croissante de limite $S(x)$. Par théorème de convergence monotone : $S(x) = \sup\limits_{p \in \mathbb{N}} (u_{2p})$**
- **1 pt : (u_{2p+1}) décroissante de limite $S(x)$. Par théorème de convergence monotone : $S(x) = \inf\limits_{p \in \mathbb{N}} (u_{2p})$. De plus, toujours par décroissance de (u_{2p+1}) : $u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$**

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
On pourra séparer les cas n pair et n impair.

- **2 pts : cas n pair**
  × **1 pt : $0 \leqslant S(x) - u_{2p} \leqslant u_{2p+1} - u_{2p}$**
  × **1 pt : $u_{2p+1} - u_{2p} = \dfrac{1}{(2p+1)^x} = \dfrac{1}{(n+1)^x}$**
- **1 pt : cas n impair**

f) En déduire une fonction **Python** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

- **3 pts :**
  × **1 pt : initialisation**
  × **1 pt : condition `while`**
  × **1 pt : mises à jour `u` et `n`**

```python
def approx_Sx(x, eps) :
    u = 1
    n = 1
    while 1/(n+1)**x > eps :
        u = u + (-1)**(n+1) / n**x
        n = n + 1
    return u
```

13. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\sum\limits_{k=1}^{2p} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{(2k-1)^x} - \dfrac{1}{2^x} \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k^x}$ puis :
$\sum\limits_{k=1}^{2p} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum\limits_{k=1}^{2p} \dfrac{1}{k^x} - \dfrac{1}{2^{x-1}} \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k^x}$

- **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{2p} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum\limits_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ pair}}} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x} + \sum\limits_{\substack{k \in [\![1,2p]\!] \\ k \text{ impair}}} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{2p} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x} = -\dfrac{1}{2^x} \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k^x} + \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{(2k-1)^x}$**

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} = \sum_{\substack{k\,\in\,[\![1,2p]\!]\\ k\ \text{pair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} + \sum_{\substack{k\,\in\,[\![1,2p]\!]\\ k\ \text{impair}}} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}-1}{k^x} = -\frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$

14. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question ***13*** : $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

- **1 pt : en appliquant l'égalité de la question précédente pour** $x = 1$ **et** $p = n$**,** $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

- **1 pt : la fonction** $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ **est continue sur le segment** $[0,1]$
- **1 pt : calcul** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \ln(2)$
- **1 pt :** $S(1) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(2)$

15. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

- **1 pt : on applique l'égalité de la question** ***13*** **avec les paramètres** $x = 2$ **et** $p = n$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2^{2-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

- **1 pt : passage à la limite pour trouver** $S(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$