DS9

I. Exercice 1

Question de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

b) Préciser le comportement de u à l'infini.

* * * * *

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.

Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geqslant 2$.

4. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}\big(\ \{T_n = 1\}\ \big)$ et $\mathbb{P}\big(\ \{T_n = 2\}\ \big)$.

5. Calculer $\mathbb{P}\big(\ \{T_n = n\}\ \big)$.

On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\big(\ \{T_{n+1} = k\}\ \big) = \frac{k}{N}\,\mathbb{P}\big(\ \{T_n = k\}\ \big) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}\big(\ \{T_n = k-1\}\ \big)$$

7. On considère dans cette question la fonction G_n suivante :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\ \{T_n = k\}\ \big)x^k$$

a) Montrer que $G_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\ \{T_n = k\}\ \big)x^k$.

b) Démontrer que la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $G_n'(1)$ en fonction de X_n.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right)G_n'(x) + xG_n(x)$$

d) En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}\left(T_{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left(T_n\right) + 1$$

e) En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(T_n\right)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

f) Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ cas est pleine, 0 sinon.

II. Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad (\star)$$

8. On pose alors $v = u - \mathrm{id}_E$ et $w = u - 2\,\mathrm{id}_E$.

a) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.

b) Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

c) Prouver que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.

d) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.

9. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

10. **Application**
Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que u satisfait à la relation $(\star)$. On fera apparaître les calculs sur la copie.

b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question ***8***, dans la base $\mathscr{B}$.

c) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(w)$.

d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

III. Exercice 3

On s'intéresse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

11. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

12. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

c) Justifier alors que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

d) Justifier : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
On pourra séparer les cas n pair et n impair.

f) En déduire une fonction **Python** qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

13. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

puis :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

14. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question ***13*** : $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

15. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.