DS8 /117

I. Problème 1 /52

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriels des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d.
- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Objectifs du problème
Sot h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) \; = \; h(x) \qquad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h).
La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.
La partie II définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h), ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.
La partie III étend la résolution de (E_h) au cas où h est une fonction entière.

I.1. Étude de l'opérateur de différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

- **1 pt : linéarité**
- **1 pt : Δ est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$**

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

- **1 pt :** $\Delta(P) = \sum\limits_{k=0}^{d} \left(a_k \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \; X^i \right) - \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \, X^k$ **(par formule du binôme de Newton)**
- **1 pt :** $\Delta(P) = \sum\limits_{i=0}^{d} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} \; X^i \right) - \sum\limits_{i=0}^{d} a_i \, X^i$
- **1 pt :** $\Delta(P) = \sum\limits_{i=0}^{d-2} \left(\sum\limits_{k=i}^{d} a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + d \, a_d \, X^{d-1}$
- **1 pt : si** $\deg(P) \leqslant 0$**, alors :** $\deg\big(\Delta(P)\big) = -\infty$
- **1 pt : si** $\deg(P) \geqslant 1$**, alors :** $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$

3. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

- **1 pt**

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_d)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

- **1 pt :** $P \in \mathrm{Ker}(\Delta_d) \ \Leftrightarrow\ a_1 = a_2 = \cdots = a_d = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(\Delta_d) = \mathrm{Vect}\,(P_0) = \mathbb{K}_0[X]$
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(\Delta_d) = \mathrm{Vect}\,(\Delta(P_0), \Delta(P_1), \ldots, \Delta(P_d))$
- **1 pt :** $\Delta(P_k) = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}[X]} & \textbf{si } k = 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \dbinom{k}{i} X^i & \textbf{sinon} \end{cases}$
- **1 pt :** $(Q_0, \ldots, Q_{d_1})$ **est une base de** $\mathrm{Im}(\Delta_d)$
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$

5. En déduire $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]$
- **2 pts :** $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$
  - × **1 pt : d'après la question précédente, en notant** $m = \deg(Q)$**, il existe** $P \in \mathbb{K}_{m+1}[X]$ **tel que :** $Q = \Delta_{m+1}(P) = \Delta(P)$
  - × **1 pt :** $P \in \mathbb{K}[X]$ **car** $\mathbb{K}_{m+1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$
- **1 pt : si** h **est polynomiales, l'équation** (E_h) **admet des solutions.**

6. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h).

- **1 pt :** $\Delta(P_1) = P_0$ **et** $\Delta(P_2) = 2 \cdot P_1 + P_0$
- **1 pt :** $\Delta\left(\dfrac{1}{2}\ (P_2 - P_1)\right) = \tilde{Q}$
- **1 pt : une solution de** (E_h) **est donc la fonction** $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ (x^2 - x)$
- **2 pts : L'ensemble des solutions polynomiales de** (E_h) **est donc :** $\{x \mapsto \tilde{f}(x) + c \mid c \in \mathbb{K}\} \ = \ \{x \mapsto \frac{1}{2}\ (x^2 - x) + c \mid c \in \mathbb{K}\}$

I.2. Polynômes de Bernoulli

On note ω l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0,1]$, par : $\omega(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) \ = \ n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\,\omega(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1\right)\left(\omega(t)\right)^{n-1}}\ dt$$

I.2.a) Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$I_p \ = \ \int_0^1 \frac{\left(\omega(t)\right)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1}\ dt$$

7. Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, cette intégrale est bien définie.

- **1 pt :** $\mathbf{e}^z - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ z = 2ik\pi$
- **1 pt :** $\forall t \in [0,1],\ \left|\omega(t)\right| = \left|\mathbf{e}^{2i\pi t}\right| = 1 \neq 2\pi$
- **1 pt : la fonction** $t \mapsto \dfrac{\left(\omega(t)\right)^{p+1}}{\mathbf{e}^{\omega(t)} - 1}$ **est continue sur le** `SEGMENT` $[0,1]$

On admet :
$$\begin{cases} I_0 \;=\; 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\;\; I_p = 0 \end{cases}$$

I.2.b) Lien avec l'équation (E_h)

8. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:
$$B_n(z) \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\, I_{k-n}$$
Démontrer que B_n est un polynôme unitaire de degré n.

- **1 pt**

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n' = n\, B_{n-1}$.

- **2 pts**

10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:
$$B_n(z+1) - B_n(z) \;=\; n\, z^{n-1}$$
On pourra utiliser sans démonstration l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{z\,\omega(t)}}{\big(\omega(t)\big)^{n-1}}\, dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

- **1 pt**

11. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \left(\frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z) \right) \;=\; \sum_{k=0}^{d} a_k\, z^k \;=\; h(z)$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \left(\frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1}\, B_{k+1}(z) \right) = \tilde{g}(z+1) - \tilde{g}(z)$
- **1 pt : $\tilde{g}$ est bien polynomiale car B_1, …, B_{d+1} le sont**

I.2.c) Unicité

12. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :
$$\begin{cases} B_0 \;=\; 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\;\; B_n' = n\, B_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\;\; \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0 \end{cases}$$

- **2 pts : la suite (B_n) est solution du système ci-dessous**
  - × **1 pt :** $B_0(X) = 1$ **d'après** ***26*** **et** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = n\, B_{n-1}$ **d'après** ***27***
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0$
- **4 pts : c'en est l'unique solution**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **3 pts : hérédité**

13. On note $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n(X) = (-1)^n\, B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H_n = B_n$.

- **2 pts : (H_n) satisfait le système de la question précédente**
  - × **1 pt :** $H_0(X) = 1$ **et** $H_n' = n\, H_{n-1}$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 H_n(t)\, dt = 0$ **avec le changement de variable** $\boxed{u = 1-t}$

I.3. Solution entière de l'équation (E_h)

I.3.a) Une inégalité de contrôle

On se propose dans cette partie de montrer par l'absurde la propriété $\mathcal{P}$:

$$\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \big(|z| = (2n+1)\,\pi \ \Rightarrow\ |\mathrm{e}^z - 1| \geqslant c\big)$$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

14. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et d'une suite de complexes $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\mathrm{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p+1)\,\pi$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note : $a_p = \mathrm{Re}\,(z_p)$ et $b_p = \mathrm{Im}\,(z_p)$.

- **1 pt : on applique** `NON(`$\mathscr{P}$`())` **à** $c = \dfrac{1}{p}$**, alors il existe** $n_p \in \mathbb{N}$ **et il existe** $z_p \in \mathbb{C}$ **tel que :**

$$|z_p| = (2n_p+1)\,\pi \qquad \texttt{ET} \qquad |\mathbf{e}^{z_p} - 1| < \frac{1}{p}$$

- **1 pt : par théorème d'encadrement :** $\mathbf{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

15. Démontrer : $a_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{a_p} = \big|\mathbf{e}^{z_p}\big| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} |1| = 1$. **Par continuité de** $\ln$ **en** 1 **:** $a_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $\big||z_p| - |b_p|\big| = \big||z_p| - |ib_p|\big| \leqslant |z_p - ib_p| = |a_p|$**, puis théorème d'encadrement**

16. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$\varepsilon_p \;=\; \begin{cases} +1 & \text{si } b_p \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } b_p < 0 \end{cases}$$

En étudiant $\exp\big(z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p|\big)$ aboutir à une contradiction et conclure.

- **1 pt :** $\exp\big(z_p - i\varepsilon_p\,|z_p|\big) = \mathbf{e}^{z_p} \times \mathbf{e}^{-i\varepsilon_p\,(2n_p+1)\pi} = -\mathbf{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- **1 pt :** $z_p - i\varepsilon_p\,|z_p| = a_p - i\varepsilon_p\,\big(|z_p| - |b_p|\big)$
- **1 pt :** $\mathbf{e}^{a_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ **et** $\mathbf{e}^{i\varepsilon_p\,(|z_p|-|b_p|)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}^{-i\varepsilon_p\times 0} = 1$. **Donc :** $\exp\big(z_p - i\varepsilon_p\,|z_p|\big) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

I.3.b) Une solution à (E_h)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit maintenant :

$$\gamma_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (2n+1)\,\pi\,\mathrm{e}^{2i\pi t} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on note :

$$Q_n(z) \;=\; n!\,\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}}{\big(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\big)\,\big(\gamma_n(t)\big)^{n-1}}\, dt$$

17. Montrer qu'il existe deux constantes $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|Q_n(z)\right| \leqslant a\,\mathrm{e}^{b\,n\,|z|}$$

- **4 pts**

On pourrait alors démontrer que la fonction f suivante est solution de (E_h) :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1}\, \dfrac{h^{(n)}(0)}{n!}\, Q_{n+1}(x) \end{array}$$

II. Problème II /65

Pour toute suite de réels $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, si la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, on notera $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} d_k$ sa limite.

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_k$$

Le problème est constitué de deux parties largement indépendantes. La première partie commence en démontrant un analogue de cette inégalité : l'inégalité de Knopp. La deuxième partie étudie l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

II.1. Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carlement (on justifie cette appellation en fin de partie).

II.1.a) Inégalité de Jensen et inégalité intégrale de Jensen

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$.

18. *Inégalité de Jensen*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs dans un intervalle J. Soit φ un fonction convexe sur J. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in [a,b]^n,\ \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\big(f(a_k)\big)$$

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt : justification** $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(a_k) \in J$
  - × **1 pt : utilisation de la convexité de φ sur J**
  - × **1 pt : reste du calcul**

19. *Inégalité intégrale de Jensen*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J. Démontrer :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\ dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b (\varphi \circ f)(t)\ dt$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

- **1 pt : On considère la subdivision du segment** $[a, b]$ **suivante :**

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a + k\ \frac{b-a}{n}$$

et inégalité de Jensen
- **1 pt : application du théorème sur les sommes de Riemann pour** f **et** $\varphi \circ f$
- **1 pt : continuité de** φ

II.1.b) Une autre inégalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

20. Justifier que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt**

On suppose que la fonction F admet une limite, notée L, en $+\infty$.
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t\, f(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{1}{x}\ g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t\, f(t)\ dt$$

21. Déterminer la limite de g lorsque x tend vers 0.

- **1 pt : IPP pour obtenir :** $g(x) = F(x) - \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x F(t)\ dt$
- **1 pt :** F **est croissante sur** $\mathbb{R}_+$ **donc :** $0 = F(0) \leqslant F(t) \leqslant F(x)$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale :** $0 \leqslant g(x) \leqslant F(x)$
- **1 pt : continuité de** F **en** 0 **et théorème d'encadrement**

On **admet** : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

22. Justifier que, pour tout $A > 0$, la fonction $H_A : x \mapsto \displaystyle\int_A^x h(t)\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, +\infty[$.

- **1 pt :** h **est continue sur** $[A, +\infty[$
- **1 pt :** H_A **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[A, +\infty[$ **car c'est la primitive de** h **qui s'annule en** A**.**

23. Démontrer que la fonction H_A admet une limite en $+\infty$, notée $\tilde{H}(A)$ puis :

$$\lim_{A \to 0} \tilde{H}(A) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = L$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

- **1 pt : IPP pour obtenir :** $H_A(x) = \left[-\dfrac{1}{t} \times U(t) \right]_A^x - \displaystyle\int_A^x \left(-\frac{1}{t}\right) \times t\, f(t)\ dt$
- **1 pt :** $H_A(x) = g(A) - g(x) + F(x) - F(A)$
- **1 pt : existence d'une limite finie pour** H_A **en** $+\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{A \to 0} \tilde{H}(A) = L$

II.1.c) Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

On note toujours F la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

On suppose que la fonction F admet une limite, notée L, en $+\infty$.

24. Soit $a > 0$. Démontrer, pour tout $x \geqslant a$:

$$\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt\right) \leqslant \frac{1}{x-a}\int_a^x t\,f(t)\ dt$$

- **1 pt : hypothèses de l'inégalité intégrale de Jensen (démonstration de $t \mapsto \ln\big(t\,f(t)\big)$ est continue sur le segment $[a, x]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction $\exp$ est continue et convexe sur $\mathbb{R}$)**
- **1 pt : application inégalité intégrale de Jensen**

25. Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt$ admet une limite finie lorsque a tend vers 0.

- **1 pt : $\displaystyle\int_a^x \ln(t)\ dt = x\ln(x) - a\ln(a) - (x-a)$ par IPP. Donc $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln(t)\ dt$ admet une limite finie quand a tend vers 0. Plus précisément : $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^x \ln(t)\ dt = x\ln(x) - x$.**
- **1 pt : $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln\big(f(t)\big)\ dt$ admet une limite quand a tend vers 0. Plus précisément : $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^x \ln\big(f(t)\big)\ dt = W(x) - W(0) = \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt$.**

26. Déduire des deux questions précédentes, pour tout $x > 0$:

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\ dt$$

On pourra remarquer : $\ln\big(f(t)\big) = \ln\big(t\,f(t)\big) - \ln(t)$.

- **1 pt : $\displaystyle\frac{1}{x-a}\int_a^x t\,f(t)\ dt \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\int_0^x t\,f(t)\ dt$**
- **1 pt : $\exp\left(\displaystyle\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln\big(t\,f(t)\big)\ dt\right) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{x}{\mathbf{e}}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right)$**
- **1 pt : fin du calcul**

27. On note $\gamma : x \mapsto \exp\left(\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right)$ et $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \gamma(t)\ dt$.
Démontrer que Γ admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ, et :

$$\ell \leqslant \mathrm{e}\,L$$

- **1 pt : La fonction γ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$. La fonction Γ, la primitive de γ qui s'annule en 0, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.**
- **1 pt : Γ croissante sur $\mathbb{R}_+$**
- **1 pt : d'après la question précédent : $\gamma(x) \leqslant \mathbf{e}\,h(x)$. Et par croissance de l'intégrale : $\Gamma(s) \leqslant \mathbf{e}\displaystyle\int_0^s h(x)\ dx$**
- **1 pt : $H : s \mapsto \displaystyle\int_0^s h(x)\ dx$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (et de limite L d'après *6*)**
- **1 pt : par théorème de convergence monotone : $H(s) \leqslant L$ puis conclusion**

On admet que tous les résultats des questions ***18*** à ***27*** restent valides pour une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

II.1.d) Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

28. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par :

$$\begin{cases} v_k(x) \ = \ \dfrac{1}{x} \sum\limits_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \dfrac{1}{x} \ (x-k+1) \ln(a_k) \quad \text{si } k \geqslant 2 \\ v_1(x) \ = \ \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

- **1 pt : v_1 est minimale en 1**
- **1 pt : v_k dérivable sur $[k-1, k]$**
- **1 pt :** $v_k'(x) = \dfrac{(k-1)\ \ln(a_k) - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \ln(a_i)}{x^2}$
- **1 pt : v_k décroissante sur $[k-1, k]$ et donc minimale en k**

29. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt\right)\ dx \ \geqslant \ \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right)$$

On pourra utiliser la question précédente.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\ dt = \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + (x-k+1)\ \ln(a_k)$
- **1 pt :** $v_k(k) = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$
- **1 pt : d'après la question précédente : $v_k(x) \leqslant v_k(k)$, puis fin des calculs**

30. En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

- **1 pt : Supposons que la suite (a_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. De plus :**

$$\exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right) \ = \ \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}$$

- **1 pt : on somme les inégalités de la question précédente et on obtient : $\Gamma(n) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\prod\limits_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}$. Et d'après *9* : $\Gamma(n) \leqslant \mathrm{e}\, L$.**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor+1} a_k$
- **1 pt : La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\prod\limits_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par e $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, puis conclusion**

II.2. Inégalité de Carleman-Yang

Le but de cette dernière partie est d'établir l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

II.2.a) Un développement en série entière

On note φ la fonction définie par :

$$\forall t \in \,]-1,1[\setminus\{0\}, \qquad \varphi(t) \;=\; (1-t)^{1-\frac{1}{t}}$$

On définit aussi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\; b_n = -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1}\, b_{n-k} \end{cases}$$

31. Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0.

- **1 pt : La fonction φ admet une limite finie en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par e**

On notera toujours φ ce prolongement.

32. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|b_n| \leqslant 1$.
On admet alors que, pour tout $t \in \,]-1,1[$, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\, t^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

33. Démontrer que, pour tout $t \in \,]-1,1[\setminus\{0\}$, $\varphi'(t) = \varphi(t)\,\psi(t)$, où ψ est une fonction continue sur $]-1,1[$ à préciser.

- **1 pt : φ est dérivable sur** $]-1,1[\setminus\{0\}$
- **1 pt : On note $\psi : t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)+t}{t^2}$. Alors : $\varphi' = \psi \times \varphi$**
- **1 pt : ψ continue sur** $]-1,1[\setminus\{0\}$
- **1 pt : en définissant $\psi(0) = -\dfrac{1}{2}$, la fonction ψ est continue en** 0

34. Démontrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

- **1 pt : φ' admet une limite finie en** 0
- **1 pt : reste des hypothèses du théorème de la limite de la dérivée**

35. On admet qu'une autre écriture de la fonction ψ est :

$$\forall t \in \,]-1,1[, \quad \psi(t) \;=\; -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\, t^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \,]-1,1[$, on note :

$$u_n(t) \;=\; -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, t^k \quad \text{et} \quad v_n(t) \;=\; -\mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} b_k\, t^k$$

Calculer $u_n(t) \times v_n(t)$.

- **3 pts**

36. On note ξ la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$\xi : t \mapsto \mathrm{e} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \, t^k\right)$$

On admet que la fonction ξ est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\xi' : t \mapsto -\mathrm{e} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \, b_{k+1} \, t^k$$

Conclure : $\varphi = \xi$.

- **3 pts**

II.2.b) Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suite de réels strictement positifs. On admet que, pour toute suite de réels strictement positifs $(d_{k,n})_{(k,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} d_{k,n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} d_{k,n}\right)$$

37. Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k \, a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}}\right)$$

- **3 pts**

38. En considérant $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, en déduire l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n$$

- **3 pts**

39. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n \geqslant 0$.
En quoi l'inégalité précédente est-elle un raffinement de l'inégalité de Carleman ?

- **2 pts**