DS8

I. Problème 1

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriels des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d.
- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Objectifs du problème

Sot h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) \ = \ h(x) \qquad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h).
La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.
La partie II définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h), ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.
La partie III étend la résolution de (E_h) au cas où h est une fonction entière.

I.1. Étude de l'opérateur de différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

3. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_d)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

5. En déduire $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

6. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h).

I.2. Polynômes de Bernoulli

On note ω l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0,1]$, par : $\omega(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) \;=\; n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\,\omega(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1\right)\left(\omega(t)\right)^{n-1}}\, dt$$

I.2.a) Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$I_p \;=\; \int_0^1 \frac{\left(\omega(t)\right)^{p+1}}{\mathrm{e}^{\omega(t)} - 1}\, dt$$

7. Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, cette intégrale est bien définie.

On admet :

$$\begin{cases} I_0 \;=\; 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\; I_p = 0 \end{cases}$$

I.2.b) Lien avec l'équation (E_h)

8. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z) \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\, I_{k-n}$$

Démontrer que B_n est un polynôme unitaire de degré n.

9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n' = n\, B_{n-1}$.

10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z+1) - B_n(z) \;=\; n\, z^{n-1}$$

On pourra utiliser sans démonstration l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{z\,\omega(t)}}{\left(\omega(t)\right)^{n-1}}\, dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

11. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

I.2.c) Unicité

12. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} B_0 \;=\; 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\; B_n' = n\, B_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\; \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0 \end{cases}$$

13. On note $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n(X) = (-1)^n\, B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H_n = B_n$.

I.3. Solution entière de l'équation (E_h)

I.3.a) Une inégalité de contrôle

On se propose dans cette partie de montrer par l'absurde la propriété $\mathcal{P}$:

$$\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \big(|z| = (2n+1)\,\pi \ \Rightarrow\ |\mathrm{e}^z - 1| \geqslant c\big)$$

On suppose que $\mathcal{P}$ est fausse.

14. Montrer l'existence d'une suite d'entiers naturels $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et d'une suite de complexes $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\mathrm{e}^{z_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p+1)\,\pi$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note : $a_p = \mathrm{Re}\,(z_p)$ et $b_p = \mathrm{Im}\,(z_p)$.

15. Démontrer : $a_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|z_p| - |b_p| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

16. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$\varepsilon_p \ = \ \begin{cases} +1 & \text{si } b_p \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } b_p < 0 \end{cases}$$

En étudiant $\exp\big(z_p - i\,\varepsilon_p\,|z_p|\big)$ aboutir à une contradiction et conclure.

I.3.b) Une solution à (E_h)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit maintenant :

$$\gamma_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (2n+1)\,\pi\,\mathrm{e}^{2i\pi t} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on note :

$$Q_n(z) \ = \ n! \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{z\,\gamma_n(t)}}{\left(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)} - 1\right)\left(\gamma_n(t)\right)^{n-1}}\, dt$$

17. Montrer qu'il existe deux constantes $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\big|Q_n(z)\big| \ \leqslant\ a\,\mathrm{e}^{b\,n\,|z|}$$

On pourrait alors démontrer que la fonction f suivante est solution de (E_h) :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\, \frac{h^{(n)}(0)}{n!}\, Q_{n+1}(x) \end{array}$$

II. Problème II

Pour toute suite de réels $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, si la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, on notera $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} d_k$ sa limite.

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors la suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_k$$

Le problème est constitué de deux parties largement indépendantes. La première partie commence en démontrant un analogue de cette inégalité : l'inégalité de Knopp. La deuxième partie étudie l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

II.1. Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carlement (on justifie cette appellation en fin de partie).

II.1.a) Inégalité de Jensen et inégalité intégrale de Jensen

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant : $a<b$.

18. *Inégalité de Jensen*
Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction à valeurs dans un intervalle J. Soit φ un fonction convexe sur J. Démontrer :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall (a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}\in[a,b]^n,\ \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right)\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\big(f(a_k)\big)$$

19. *Inégalité intégrale de Jensen*
Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans un intervalle J. Soit φ une fonction continue et convexe sur J. Démontrer :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi\circ f)(t)\,dt$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

II.1.b) Une autre inégalité intégrale

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

20. Justifier que la fonction $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose que la fonction F admet une limite, notée L, en $+\infty$.
Pour tout $x>0$, on pose :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t\,f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{1}{x}\,g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\,f(t)\,dt$$

21. Déterminer la limite de g lorsque x tend vers 0.

On **admet** : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

22. Justifier que, pour tout $A > 0$, la fonction $H_A : x \mapsto \displaystyle\int_A^x h(t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, +\infty[$.

23. Démontrer que la fonction H_A admet une limite en $+\infty$, notée $\tilde{H}(A)$ puis :

$$\lim_{A\to 0} \tilde{H}(A) \ = \ \lim_{x\to+\infty} F(x) \ = \ L$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

II.1.c) Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

On note toujours F la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

On suppose que la fonction F admet une limite, notée L, en $+\infty$.

24. Soit $a > 0$. Démontrer, pour tout $x \geqslant a$:

$$\exp\left(\frac{1}{x-a} \int_a^x \ln\big(t\, f(t)\big)\, dt\right) \ \leqslant \ \frac{1}{x-a} \int_a^x t\, f(t)\, dt$$

25. Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $a \mapsto \displaystyle\int_a^x \ln\big(t\, f(t)\big)\, dt$ admet une limite finie lorsque a tend vers 0.

26. Déduire des deux questions précédentes, pour tout $x > 0$:

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right) \ \leqslant \ \frac{\mathrm{e}}{x^2} \int_0^x t\, f(t)\, dt$$

On pourra remarquer : $\ln\big(f(t)\big) = \ln\big(t\, f(t)\big) - \ln(t)$.

27. On note $\gamma : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right)$ et $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \gamma(t)\, dt$.
Démontrer que Γ admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ, et :

$$\ell \ \leqslant \ \mathrm{e}\, L$$

On admet que tous les résultats des questions ***18*** à ***27*** restent valides pour une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

II.1.d) Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs.
On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

28. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par :

$$\begin{cases} v_k(x) \ = \ \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \dfrac{1}{x}\, (x-k+1)\, \ln(a_k) & \text{si } k \geqslant 2 \\[2ex] v_1(x) \ = \ \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

29. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{k-1}^{k} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln\big(f(t)\big)\, dt\right)\, dx \;\geqslant\; \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln(a_i)\right)$$

On pourra utiliser la question précédente.

30. En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

II.2. Inégalité de Carleman-Yang

Le but de cette dernière partie est d'établir l'inégalité de Carleman-Yang, qui est un raffinement de l'inégalité de Carleman.

II.2.a) Un développement en série entière

On note φ la fonction définie par :

$$\forall t \in \,]-1,1[\backslash\{0\}, \qquad \varphi(t) \;=\; (1-t)^{1-\frac{1}{t}}$$

On définit aussi la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1}\, b_{n-k} \end{cases}$$

31. Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0.

On notera toujours φ ce prolongement.

32. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|b_n| \leqslant 1$.

On admet alors que, pour tout $t \in \,]-1,1[$, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\, t^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

33. Démontrer que, pour tout $t \in \,]-1,1[\backslash\{0\}$, $\varphi'(t) = \varphi(t)\,\psi(t)$, où ψ est une fonction continue sur $]-1,1[$ à préciser.

34. Démontrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

35. On admet qu'une autre écriture de la fonction ψ est :

$$\forall t \in \,]-1,1[, \quad \psi(t) \;=\; -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\, t^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \,]-1,1[$, on note :

$$u_n(t) \;=\; -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\, t^k \quad \text{et} \quad v_n(t) \;=\; -\mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} b_k\, t^k$$

Calculer $u_n(t) \times v_n(t)$.

36. On note ξ la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$\xi : t \mapsto \mathrm{e}\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\, t^k\right)$$

On admet que la fonction ξ est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\xi' : t \mapsto -\mathrm{e} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\, b_{k+1}\, t^k$$

Conclure : $\varphi = \xi$.

II.2.b) Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suite de réels strictement positifs. On admet que, pour toute suite de réels strictement positifs $(d_{k,n})_{(k,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} d_{k,n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} d_{k,n}\right)$$

37. Démontrer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left(c_k\, a_k \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}}\right)$$

38. En considérant $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, en déduire l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}\right)a_n$$

39. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $b_n \geqslant 0$.
En quoi l'inégalité précédente est-elle un raffinement de l'inégalité de Carleman ?