DS6 /130

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /10

1. (*) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-2+3i$.

- **1 pt : par unicité de l'écriture algébrique**

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (2) \\ 2xy = 3 & (*) \end{cases}$$

- **1 pt :** $\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^2 = \sqrt{13}-2 \\ 2\,y^2 = \sqrt{13}+2 \end{cases}$
- **1 pt : comme** $xy = \dfrac{3}{2} > 0$**, alors** $z = \pm z_0$ **où** $z_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}} + i\,\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}}$
- **1 pt : Les complexes z_0 et $-z_0$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = -2+3i$. Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.**

2. (*) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) = 0$
- **2 pts :** $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}\,x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$
- **2 pts :** $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{6}\,x^3 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{23}{40}\,x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$

3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \dots, e_m) \in E^m$.
Donner la définition quantifiée de la proposition : la famille $(e_1, \dots, e_m)$ est libre.

- **1 pt**

Exercice 2 /30

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)\,P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\,U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

4. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

- **1 pt :** $L_0 = 1$ ET $L_1 = X$
- **1 pt :** $L_2 = \dfrac{1}{2^2 \times 2!} \; {U_2}^{(2)} = \dfrac{1}{8} \; \Big(\big(X^2 - 1\big)^2\Big)^{(2)} = \dfrac{1}{8} \; \Big(2 \; \big(X^2 - 1\big) \; 2X\Big)' = \dfrac{4}{8} \; \Big(\big(X^2 - 1\big) \; X\Big)'$
$= \dfrac{1}{2} \; \Big(2X \times X + \big(X^2 - 1\big) \times 1\Big)$

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

5. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

- **1 pt :** $U_n = \big(X^2 - 1\big)^n = X^{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \; \big(X^2\big)^{n-k} \; (-1)^k\right) = X^{2n} + R_n$
- **1 pt :** $L_n = \dfrac{1}{2^n \, n!} \; \big(U_n\big)^{(n)} = \dfrac{1}{2^n \, n!} \; \big(X^{2n} + R_n\big)^{(n)} = \dfrac{1}{2^n \, n!} \; \Big(\big(X^{2n}\big)^{(n)} + {R_n}^{(n)}\Big)$
- **1 pt :** $\big(X^{2n}\big)^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!} \; X^n$ **par dérivations successives**

1 pt si seul le calcul de degré apparaît

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in \,]-1, 1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' \; = \; \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

- **1 pt :** $U_n \; = \; \big(X^2 - 1\big)^n \; = \; \big(X - 1\big)^n \; \big(X + 1\big)^n$ **donc** -1 **et** 1 **racines de multiplicité** n
- **1 pt : ainsi** -1 **et** 1 **sont racines de** U_n' **de multicplicité** $n-1$ **donc** U_n' **est factorisable par** $\big(X - 1\big)^{n-1} \; \big(X + 1\big)^{n-1}$
- **1 pt : le théorème de Rolle (continue sur** $[-1, 1]$ **/ dérivable sur** $]-1, 1[$ **/ vérifie** $U_n(-1) = U_n(1)$**) assure l'existence de** $\alpha \in \,]-1, 1[$ **tel que** $U_n'(\alpha) = 1$
- **1 pt : finalement** ${U_n}' = (X - \alpha) \; (X-1)^{n-1} \; V_n = \lambda \, (X - \alpha) \; (X-1)^{n-1} \; (X+1)^{n-1}$

7. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} \; = \; \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} \; = \; \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$

- **1 pt : comme** -1 **et** 1 **racines de multiplicité** $n-k$ **de** ${U_n}^{(k)}$ **ils sont racines de** ${U_n}^{(k)}$ **de multicplicité** $n-k-1$ **donc** U_n' **est factorisable par** $\big(X - 1\big)^{n-k-1} \; \big(X + 1\big)^{n-k-1}$
- **1 pt : on note** $\alpha_0 = -1$ **et** $\alpha_{k+1} = 1$
- **1 pt : on applique Rolle sur chacun des intervalles** $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ **à** ${U_n}^{(k)}$ **(**k **intervalles qui donnent** k **nouvelles racines de** ${U_n}^{(k)}$

8. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

- **2 pts : toute justification convenable que la question *16* est l'initialisation et la *17* l'hérédité de la propriété $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ où :**

$$\mathscr{P}(k) \quad : \quad \textbf{il existe des réels } \alpha_1, \dots, \alpha_k \textbf{ deux à deux distincts dans }]-1,1[\textbf{ et un réel } \mu \textbf{ tels que : } {U_n}^{(k)} = \mu (X-1)^{n-k} (X+1)^{n-k} (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_k)$$

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

9. Justifier : $\phi\big(\mathbb{R}[X]\big) \subset \mathbb{R}[X]$ et démontrer :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2,\ \phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = \lambda \cdot \phi(P) + \mu \cdot \phi(Q)$$

On dit que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt : ϕ est linéaire**
- **1 pt : ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$**

Dans les questions 10 à 14, n désigne un entier naturel.

10. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ, *i.e.* : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt :** $\deg\big(\phi(P)\big) = \deg\big((X^2-1)\, P'' + 2X\, P'\big) \leqslant \max\big(\deg\big((X^2-1)P''\big), \deg\big(2X\, P'\big)\big)$
- **1 pt :** $\deg\big((X^2-1)P''\big) \leqslant n$ **et** $\deg\big(2X\, P'\big) \leqslant n$

On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette application ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

11. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note : $P_k(X) = X^k$. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(P_k)$.

- **1 pt :** $\phi(P_0) = (X^2-1)\ P_0'' + 2X\, P_0' = (X^2-1) \times 0 + 2X \times 0 = 0 = 0\,(0+1) \cdot P_0$
- **1 pt :** $\phi(P_1) = (X^2-1)\ P_1'' + 2X\, P_1' = (X^2-1) \times 0 + 2X \times 1 = 2X = 2\, P_1 = 1\,(1+1) \cdot P_1$
- **1 pt :** $\big(\phi(P_k)\big)(X) = \Big(k\,(k+1)\ P_k - k\,(k-1) P_{k-2}\Big)(X)$ **si** $k \in [\![2, n]\!]$

12. Vérifier : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1) U_k' - 2kXU_k = 0$.

- **1 pt : si $k = 0$,** $(X^2-1)\ U_0' - \cancel{2 \times 0\, X\, U_0} = (X^2-1)\ \Big(\big(X^2-1\big)^0\Big)' = (X^2-1)\ P_0' = 0_{\mathbb{R}[X]}$
- **1 pt : si $k \geqslant 1$,** $(X^2-1)\ U_k' - 2k\, X\, U_k = (X^2-1)\ \Big(\big(X^2-1\big)^k\Big)' - 2k\, X\, (X^2-1)^k = \ldots = 0_{\mathbb{R}[X]}$

13. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 12, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz :

$$(X^2-1) U_k^{(k+2)} + 2X U_k^{(k+1)} - k(k+1) U_k^{(k)} \ = \ 0$$

- **3 pts :**
  - **1 pt : si $k = 0$,** $\Big((X^2-1)\ U_0'\Big)^{(1)} = \Big((X^2-1)\ \big((X^2-1)^0\big)'\Big)^{(1)} = \Big((X^2-1)\ P_0'\Big)^{(1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$
  - **1 pt : si $k \geqslant 1$,** $\Big((X^2-1)\ U_k'\Big)^{(k+1)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} \binom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)}\ \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)}$ $\cancel{+ \displaystyle\sum_{j=3}^{k+1} \binom{k+1}{j} \Big((X^2-1)\Big)^{(j)}\ \Big(U_k'\Big)^{(k+1-j)}}$
  - **1 pt :** $\ldots = (X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + (k+1)\, 2X\ {U_k}^{(k+1)} + k(k+1)\ {U_k}^{(k)}$

- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $\left(2kX\,U_k\right)^{(k+1)} = \sum\limits_{j=0}^{1} \binom{k+1}{j} \left(2kX\right)^{(j)} \left(U_k\right)^{(k+1-j)}$
  - × **1 pt :** $2kX\ {U_k}^{(k+1)} + (k+1)\ 2k\ {U_k}^{(k)}$

14. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que : $\phi_n(L_k) = \alpha_k \cdot L_k$, en précisant la valeur de α_k. *On pourra utiliser la question 13.*

- **1 pt :** $\phi_n(L_k) = (X^2-1)\ L_k'' + 2X\ L_k' = \dfrac{1}{2^k\ k!}\left((X^2-1)\ {U_k}^{(k+2)} + 2X\ {U_k}^{(k+1)}\right)$
- **1 pt :** $\ldots = \dfrac{1}{2^k\ k!}\ k(k+1)\ {U_k}^{(k)} = k(k+1)\ L_k$ **d'après la question précédente**

Problème /90

Première partie

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $[a, +\infty[$, continûment dérivable dont la dérivée est croissante sur $[a, +\infty[$ et ne prend que des valeurs strictement négatives.

15. On note g la fonction définie par :

$$g\ :\ \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est l'étude des points fixes de f.

a) Montrer que la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.
Que peut-on en déduire sur le comportement de g en $+\infty$?

- **1 pt :** f **décroissante sur** $[a, +\infty[$ **car, d'après l'énoncé, la fonction** f' **est à valeurs négative sur** $[a, +\infty[$
- **1 pt :** f **est décroissante et minorée par** a **(car** f **est à valeur dans** $[a, +\infty[$**), donc...**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ **donc** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

b) Quel est le signe de $g(a)$?

- **1 pt :** f **à valeurs dans** $[a, +\infty[$**, donc :** $g(a) \geqslant 0$

c) Démontrer que la fonction g s'annule en un unique point $d \in [a, +\infty[$.
Que cela signifie-t-il pour f ?

- **1 pt :** g **dérivable sur** $[a, +\infty[$ **et** $g' : x \mapsto f'(x) - 1 < 0$**. Donc :**

x	a $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$
Variations de g	$g(a)$ $\searrow$ $-\infty$

- **1 pt : hypothèse du théorème de la bijection**
- **1 pt :** $g\big([a, +\infty[\big) = \,]-\infty, g(a)]$ **et** $0 \in \,]-\infty, g(a)]$
- **1 pt :** $g(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x) = x$**. Donc la fonction** f **admet** d **comme unique point fixe sur** $[a, +\infty[$

16. On note h la fonction définie par :

$$h : \begin{array}{rcl} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\big(f(x)\big) - 2\,f(x) + x \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est l'étude du signe des valeurs prises par la fonction h.

a) Démontrer : $\forall x \in [a, d[,\ f(x) > x$.

- **1 pt : g est strictement croissante sur $[a, +\infty[$ donc $g(x) > g(d) = 0$**

b) En déduire : $\forall x \in [a, d[,\ h(x) < 0$.

- **1 pt : d'après la question précédente et pas stricte décroissante de f sur $[a, +\infty[$: $f\big(f(x)\big) < f(x)$**
- **1 pt : par sommation avec l'inégalité $-f(x) < -x$, on obtient : $h(x) < 0$**

c) Démontrer : $\forall x \in]d, +\infty[,\ h(x) > 0$.

- **1 pt : on procède comme dans les deux questions précédentes**

d) Démontrer que la fonction h s'annule une unique fois sur $[a, +\infty[$ et que ce point d'annulation est d.

- **1 pt : d'après *16b* et *16c*, h ne s'annule par sur les intervalles $[a, d[$ et $]d, +\infty[$**
- **1 pt : $h(d) = 0$ car d est un point fixe de f**

17. On note F la fonction définie par :

$$F : \begin{array}{rcl} [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x - \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{h(x)} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

Un des objectifs de cette question est d'établir quelques inégalités sur les valeurs prises par la fonction F.

a) Justifier que la fonction F est bien définie sur $[a, +\infty[$.

- **1 pt**

b) Démontrer :

$$\forall x \in [a, d[,\ F(x) > x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]d, +\infty[,\ F(x) < x$$

- **2 pts : $\forall x \in [a, d[,\ F(x) > x$**
  - × **1 pt : $F(x) > x \ \Leftrightarrow\ \big(f(x) - x\big)^2 > 0$**
  - × **1 pt : cette dernière assertion est vraie, car, comme $x \neq d$, alors : $f(x) - x \neq 0$.**
- **1 pt : raisonnement similaire pour : $\forall x \in]d, +\infty[,\ F(x) < x$**

c) Soit $x \in [a, d[$. Démontrer qu'il existe $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} x \ < \ y \ < \ z \ < \ f(x) \\ f(x) - x \ = \ \big(f'(y) - 1\big)\,(x - d) \\ f\big(f(x)\big) - f(x) \ = \ \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big) \end{cases}$$

- **1 pt :** $f(x) - x = \big(f'(y) - 1\big)\,(x - d) \ \Leftrightarrow \ \dfrac{g(x)}{x - d} = g'(y)$ **(car** $g(d) = 0$**)**
- **1 pt : TAF sur** $[x, d]$
- **1 pt : par stricte décroissance de** f **sur** $[a, +\infty[$ **:** $f(x) > f(d) = d$
- **1 pt :** $f\big(f(x)\big) - f(x) = \big(f'(z) - 1\big)\,\big(f(x) - d\big) \ \Leftrightarrow \ \dfrac{g\big(f(x)\big) - g(d)}{f(x) - d} \ = \ g'(z)$
- **1 pt : TAF sur** $[d, f(x)]$

d) Soit $x \in [a, d[$. Démontrer alors :

$$h(x) \ = \ (x - d)\,\Big(\big(f'(z) - f'(y)\big)\,f'(y) + \big(f'(y) - 1\big)^2\Big)$$

- **2 pts**

e) En déduire, pour tout $x \in [a, d[$: $(x - d)\,h(x) \leqslant \big(f(x) - x\big)^2$. Puis :

$$\forall x \in [a, d[, \ \ F(x) \ \geqslant \ d$$

- **1 pt :** $(x - d)\,h(x) = (x - d)^2\,\big(f'(z) - f'(y)\big)\,f'(y) + \big(f(x) - x\big)^2$
- **1 pt :** $(x - d)\,h(x) \ \leqslant \ \big(f(x) - x\big)^2 \ \Leftrightarrow \ \big(f'(z) - f'(y)\big)\,f'(y) \ \leqslant \ 0$
- **1 pt :** f' **est croissante sur** $[a, +\infty[$ **et** $y \leqslant z$ **donc :** $f'(y) \leqslant f'(z)$**. De plus :** f' **à valeurs strictement négatives**
- **1 pt : comme** $h(x) < 0$**, on obtient :** $F(x) \geqslant d$

f) À l'aide d'un raisonnement analogue aux questions ***17c*** à ***17e***, démontrer :

$$\forall x \in \,]d, +\infty[, \ \ F(x) \ \geqslant \ d$$

- **4 pts**

18. Étude de la régularité de la fonction F.

a) Que peut-on dire, sans aucune étude particulière, de la régularité de la restriction de F à $[a, +\infty[\setminus\{d\}$?

- **1 pt :** h **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[a, +\infty[$
- **1 pt :** F **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[a, d[$ **et sur** $]d, +\infty[$

b) Justifier qu'il existe deux **fonctions** α et β définies sur $[a, +\infty[$, de limite d en d, et vérifiant pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\begin{cases} f(x) - x \ = \ \big((f' \circ \alpha)(x) - 1\big)\,(x - d) \\ h(x) \ = \ (x - d)\,\Big(\big((f' \circ \beta)(x) - (f' \circ \alpha)(x)\big)\,(f' \circ \alpha)(x) + \big((f' \circ \alpha)(x) - 1\big)^2\Big) \end{cases}$$

- **1 pt : existence**
- **1 pt** $\lim\limits_{x \to d} \alpha(x) = d$ **et** $\lim\limits_{x \to d} \beta(x) = d$

c) En déduire : $\lim\limits_{x \to d} \dfrac{f(x)-x}{h(x)} = \dfrac{1}{f'(d)-1}$.

- **1 pt : justification** $\lim\limits_{x \to d} f'\big(\alpha(x)\big) = f'(d)$ **et** $\lim\limits_{x \to d} f'\big(\beta(x)\big) = f'(d)$
- **1 pt : fin du calcul**

d) Démontrer : $\lim\limits_{x \to d} F(x) = d$.

- **1 pt**

e) Pour tout $x \in [a,+\infty[\setminus\{d\}$, donner l'expression explicite de $F'(x)$.
Démontrer alors que la fonction F' admet une limite finie au point d.

- **1 pt :** $\forall x \in [a,+\infty[\setminus\{d\}$, $F'(x) = 1 - \dfrac{f(x)-x}{h(x)} \times \left(2 - h'(x)\,\dfrac{f(x)-x}{h(x)}\right)$
- **1 pt : justification** $\lim\limits_{x \to d} h'(x) = \big(f'(d)-1\big)^2$
- **1 pt : conclusion**

f) Démontrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et préciser la valeur de $F'(d)$.

- **1 pt : justification de la continuité de F sur** $[a,+\infty[$
- **1 pt : hypothèse du théorème de la limite de la dérivée**

19. Soit $b \in [a,+\infty[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant d$.

- **1 pt : initialisation (utilisation questions *17e* et *17f*)**
- **2 pts : hérédité**

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

- **1 pt : utilisation *17b***
- **1 pt : gestion du cas** $u_n = d$

c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

- **1 pt : la suite (u_n) est décroissante et minorée par d à partir du rang 1, donc...**
- **1 pt : utilisation de la continuité de F en ℓ pour obtenir :** $F(\ell) = \ell$
- **1 pt : d'après *17b*, d est l'unique point fixe de F**

20. On considère toujours la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en question ***19***. On suppose de plus : $u_1 > d$.

a) Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que la restriction de F sur l'intervalle $[d,u_1]$ soit une fonction M-lipschitzienne.

- **1 pt : F' est continue sur le `SEGMENT` $[d,u_1]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :** $\forall x \in [d,u_1]$, $\big|F'(x)\big| \leqslant M$
- **1 pt : IAF**

Dans la suite de cette question, on suppose : $M < 1$.

b) Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant M^{n-1} |u_2 - u_1|$$

- **1 pt : d'après *19a* et *19b* : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [d, u_1]$**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité (dont 1 pt utilisation de la question précédente)**

c) En déduire, pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant $p > n$:

$$|u_n - u_p| \leqslant \frac{M^n - M^p}{M\,(1-M)} |u_2 - u_1|$$

Déterminer alors explicitement une suite (v_n) géométrique et convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - d| \leqslant v_n$$

- **1 pt : par télescopage $u_n - u_p = \sum\limits_{k=n}^{p-1} (u_k - u_{k+1})$**
- **1 pt : inégalité triangulaire et utilisation de la question précédente**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=n}^{p-1} M^{k-1} = \dfrac{M^n - M^p}{M\,(M-1)}$ car $M \neq 1$**
- **1 pt : passage à la limite quand $p \to +\infty$. On obtient (puisque $M \in \,]-1,1[$) : $v_n = \dfrac{M^{n-1}\,|u_2 - u_1|}{1-M}$**

Seconde partie

Dans cette partie, on note f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-5x} \end{array}$$

Soit $b \in \mathbb{R}_+$. On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Dans toute cette partie, on pourra utiliser sans démonstration les inégalités suivantes :

$$f\left(\frac{2}{10}\right) > \frac{2}{10}, \qquad f\left(\frac{3}{10}\right) < \frac{3}{10}, \qquad f'\left(\frac{3}{10}\right) \leqslant -\frac{11}{10}$$

21. Démontrer qu'il existe un unique réel $d \in \mathbb{R}_+$ tel que : $f(d) = d$.
Quelles sont les valeurs possibles des limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- **1 pt : la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. La fonction f' est croissante et ne prend que des valeurs strictement négatives. D'après *15c*, f admet un unique point fixe**
- **1 pt : si (u_n) converge, alors c'est un point fixe de f (passage à la limite + continuité de f en d), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$**
- **1 pt : (u_n) ne diverge pas vers $-\infty$ car cette suite est à termes positifs, et (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$ car elle est majorée par 1 à partir du rang 1**

22. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède deux termes consécutifs égaux si et seulement si : $u_0 = d$.

- **1 pt : $(\Leftarrow)$ par récurrence immédiate**
- **3 pts : $(\Rightarrow)$**
  - × **1 pt : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = u_{p+1}$ donc $u_p = d$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = d\}$ est donc non vide**
  - × **1 pt : $A \subset \mathbb{N}$ et $A \neq \varnothing$ il admet donc un plus petit élément qu'on note n_0.**
  - × **1 pt : Supposons $n_0 \neq 0$. Comme d est l'unique antécédent de d par f et que $u_{n_0} = d$, alors : $u_{n_0 - 1} = d$. Absurde !**

23. Dans toute cette question, on suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant m$: $\left\{ \begin{array}{l} u_n \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right] \\ u_0 \neq d \end{array} \right.$.

a) Démontrer : $\forall x \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right],\ f'(x) \leqslant -\dfrac{11}{10}$.

- **1 pt : utilisation de la croissance de f' sur $\mathbb{R}_+$**

b) Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \ \geqslant\ \frac{11}{10}\, |u_{n+1} - u_n|$$

- **1 pt : TAF appliqué à f sur $\left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right]$**
- **1 pt : évaluation en u_n et u_{n+1} (car ce sont des éléments de $\left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right]$) et minoration avec la question précédente**

c) En déduire, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n \geqslant m$:

$$|u_{n+1} - u_n| \ \geqslant\ \left(\frac{11}{10}\right)^{n-m} |u_{m+1} - u_m|$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

d) Que peut-on affirmer en ce qui concerne l'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
Qu'en déduire sur l'hypothèse faite en début de question ?

- **1 pt : d'après *22*, $|u_{m+1} - u_m| \neq 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{11}{10}\right)^{n-m} |u_{m+1} - u_m| = +\infty$.**
- **1 pt : Par théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_{n+2} - u_{n+1}| = +\infty$. La suite (u_n) n'est donc pas convergente.**
- **1 pt : Absurde avec la question *21*. Donc $u_0 = d$ ou $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant m$ et $u_{n_0} \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right]$**

24. Déterminer un encadrement de d.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $u_0 = d$.

- **1 pt : $d \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right]$**
- **1 pt : $(\Leftarrow)$**
- **1 pt : $(\Rightarrow)$**

On note F la fonction définie par :

$$F \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x - \dfrac{\big(f(x) - x\big)^2}{f\big(f(x)\big) - 2\,f(x) + x} & \text{si } x \neq d \\ d & \text{si } x = d \end{cases} \end{array}$$

On note alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = \dfrac{3}{10} \\ \forall n \in \mathbb{N},\; w_{n+1} = F(w_n) \end{cases}$$

On pourra utiliser sans démonstration les inégalités suivantes :

$$F'\left(\frac{2}{10}\right) \;\geqslant\; -\frac{4}{10} \qquad \text{et} \qquad F'\left(\frac{3}{10}\right) \;\leqslant\; \frac{2}{10}$$

25. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers d.

- **1 pt : application de *19c* (0 pt si les hypothèses ne sont pas vérifiées)**

26. **On admet** que la restriction de la fonction F' à l'intervalle $\left[0, \frac{4}{10}\right]$ est croissante sur $\left[0, \frac{4}{10}\right]$.

a) Donner, en justifiant brièvement un minorant et un majorant de la fonction F' sur $\left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right]$.

- **1 pt :** $\forall x \in \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right],\; -\dfrac{4}{10} \leqslant F'(x) \leqslant \dfrac{2}{10}$

b) Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique et convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n - d| \;\leqslant\; v_n$$

- **1 pt : d'après *20c* :**

$$v_n \;=\; \frac{5}{3}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \left| F\left(F\left(\frac{3}{10}\right)\right) - F\left(\frac{3}{10}\right) \right|$$

c) Proposer une fonction **Python** nommée `approx` qui prend en paramètre un réel `eps` strictement positif, et qui renvoie une valeur approchée de d à `eps` près.

- **1 pt :**

```python
import numpy as np
def f(x) :
    return np.exp(-5 * x)
```

- **1 pt :**

```python
def F(x) :
    return x - (f(x) - x)**2 / ( f(f(x)) - 2 * f(x) + x)
```

- **3 pts :**

```python
def approx(eps) :
    w = 3/10
    n = 0
    C = (5 / 3) * np.abs( F(F(3/10)) - F(3/10) )
    while C * (4/10)**(n-1) > eps :
        n = n + 1
        w = F(w)
    return w
```