DS5 /110

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

I. Exercice 1 : Cours /7

1. Démontrer : $\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3, \quad \left.\begin{array}{c} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \big(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2,\ d \mid (\lambda\, a + \mu\, b)\big)$

- **1 pt : comme** $d \mid a$ **et** $d \mid b$ **alors il existe** $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ **tel que :** $a = k_1\, d$ **et** $b = k_2\, d$
- **1 pt : ainsi :** $\lambda\, a + \mu\, b \ = \ (\lambda\, k_1 + \mu\, k_2)\, d$ **donc** $d \mid (\lambda\, a + \mu\, b)$

2. Déterminer le PGCD de 2156 et de 336 :

a) par algorithme d'Euclide,

- **0,5 pt :** $2156 \ = \ 336 \times 6 + 140$ **et** $0 \leqslant 140 < 336$
- **0,5 pt :** $336 \ = \ 140 \times 2 + 56$ **et** $0 \leqslant 56 < 140$
- **0,5 pt :** $140 \ = \ 56 \times 2 + 28$ **et** $0 \leqslant 28 < 56$
- **0,5 pt :** $56 \ = \ 28 \times 2 + 0$ **et** $0 \leqslant 0 < 28$
- **1 pt : mise en place correcte de l'algo d'Euclide et** $2136 \wedge 336 = 28$**, dernier reste non nul (point méthodologie à accorder même si erreurs de calculs)**

On attribue 0, 1 **ou** 2 **points sur les calculs (on fait une approximation au 1/2 point inférieur**

b) par décomposition en produit de facteurs premiers.

- **0,5 pt :** $2136 = 2^2 \times 7^2 \times 11$
- **0,5 pt :** $336 = 2^4 \times 3 \times 7$
- **1 pt : compréhension de la méthode et** $2156 \wedge 336 = 2^2 \times 7 = 28$ **en prenant les facteurs communs des décompositions précédentes (accorder le point de méthodologie même si erreur de calculs)**

On attribue 0 **ou** 1 **point sur les calculs (on fait une approximation au 1/2 point inférieur**

II. Exercice 2 /14

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de f'.

- **2 pts :** $h : x \mapsto \exp\left(\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right) = h_2 \circ h_1$ **où :**
  - × **1 pt :** $h_1 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ **est** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$ **et telle que :** $h_1(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$**,**
  - × **1 pt :** $h_2 = \exp$ **qui est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $f'(x) \; = \; 1 \times \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) + x \times \dfrac{1}{x^2} \; \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \; = \; \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

4. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0^+} x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^0 = 1$ **par continuité de** $\exp$ **en** 0

5. On note désormais g la fonction définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Démontrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt :** g **est continue sur** $]0, +\infty[$ **car** f **l'est**
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \; = \; \lim\limits_{x \to 0} f(x) \; = \; 0 \; = \; g(0)$

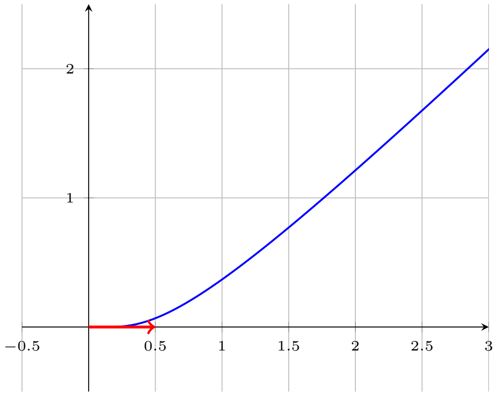
6. Dresser le tableau de variations de g et montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera.

- **1 pt : pour tout** $x > 0$**,** $g'(x) \; = \; f'(x) \; = \; \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \; > \; 0$
- **0 pt : tableau correspondant**
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** g **est continue et strictement croissante sur** $[0, +\infty[$
  - × **1 pt :** g **réalise une bijection de** $[0, +\infty[$ **sur** $g\big([0, +\infty[\big) = \left[g(0), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[= \left[0, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[=$ $[0, +\infty[$

7. Démontrer que g est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $g'(0)$?

- **1 pt :** $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \; = \; \dfrac{f(x)}{x} \; = \; \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \; \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \; 0$

8. Tracer l'allure de la courbe représentative de g.



- **1 pt : demi-tangente horizontale en** 0 **(elle est présente)**
- **1 pt : courbe et tangente coïncident à proximité de** 0
- **1 pt : le tracé illustre la limite en** $+\infty$ **de** g

0 point si sale ou manifestement pas d'effort de compréhension sur le tracé de courbe

III. Problème I /25

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

- **1 pt :** $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt :** $(A-2I)(A-I)^2 \ = \ A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$
- **1 pt :** $A^{-1} \ = \ \dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.
Déterminer $E_2(A)$.

- **1 pt : écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt : résolution du système** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt :** $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3. On note $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.
Déterminer $E_1(A)$.

- **1 pt : écriture système** $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt : résolution du système** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt :** $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- **3 pts :**
  × **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$
  × **1 pt : la réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls donc P est inversible.**
  × **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : pour** $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ou pour** $AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt : pour $P^{-1}AP = T$.**

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

5. *a)* Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- **1 pt :** $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **et les valeurs de N^0 et N^1**

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- **1 pt : D et N commutent car** $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$
- **1 pt : formule du binôme correcte**
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $T^n \ = \ D^n + n\, D^{n-1}\, N$

IV. Problème II /64

Dans tout le problème, on pourra utiliser le résultat suivant.
Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels. Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $L \in \mathbb{R}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n \ = \ \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}\, b_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}}$$

Avec ces notations :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ a_{n,k} > 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L}$$

IV.1. Étude préliminaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+2) \quad \text{et} \quad v_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n+1)$$

9. Démontrer : $\forall x \in \,]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

- **1 pt : La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$...**
- **1 pt :** $1 + x \in \mathbb{R}_+^*$

10. *a)* Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+2}\right)$.

- **1 pt**

b) En déduire le sens de variations de (u_n).

- **1 pt :** $x = \dfrac{1}{n+2} \in \,]-1,+\infty[$**, donc... Ainsi la suite (u_n) est croissante**

11. En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $v_{n+1} - v_n$ sous une forme analogue à celle utilisée dans la question précédente pour la suite (u_n), démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

- **1 pt :** $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+2} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right)$
- **1 pt :** $x = -\dfrac{1}{n+2} \in \,]-1,+\infty[$**, donc... Ainsi la suite (v_n) est décroissante**

12. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur leur comportement asymptotique ?

- **1 pt : définition adjacence**
- **1 pt :** $v_n - u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite**

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $w_n = n\,(v_{2n+1} - v_n)$. Supposons que la suite (w_n) converge vers 0.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = v_{2n+1} - v_n + \dfrac{n+1}{2\,(n+2)\,(2n+3)}$.

- **1 pt :** $v_{2n+3} - v_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+3} + \dfrac{1}{2\,(n+2)} + \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$
- **1 pt : d'après *11* :** $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+2} + \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$
- **1 pt : fin du calcul**

b) Démontrer : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$.

En déduire l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$: $w_{n+1} - w_n \geqslant \dfrac{1}{8n}$.

- **1 pt :** $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ **car, d'après *13* :** $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : définition de :** $\dfrac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{4n}} = 1$
- **1 pt : on note** $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$

c) Démontrer, pour tout $n \in [\![n_0 + 1, +\infty[\![$: $w_n \geqslant w_{n_0} + \dfrac{1}{8} \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

- **1 pt : sommation des inégalités de la question précédente pour k variant de n_0 à $n-1$**

d) Exprimer $\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \dfrac{1}{k}$ à l'aide de la fonction ln et de certains termes de la suite (u_n).

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k} = u_{p-1} + \ln(p+1)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} = u_{n-2} + \ln(n) - u_{n_0-2} - \ln(n_0)$

e) En déduire que la suite (w_n) diverge vers $+\infty$.

- **1 pt : d'après *12*, la suite (u_n) converge vers une limite ℓ**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n_0} + \dfrac{1}{8}\left(u_{n-2} + \ln(n) - u_{n_0-2} - \ln(n_0)\right) = +\infty$ **(puis théorème de comparaison)**

f) A-t-on : $v_{2n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

- **1 pt : supposons** $v_{2n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **alors on est dans le cadre de la question *13***
- **1 pt : Absurde d'après *13e***

IV.2. Étude d'une suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

14. Démontrer que les suites (B_{2n}) et (B_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (B_n) est convergente.

- **1 pt :** $B_{2(n+1)} - B_{2n} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \leqslant 0$**, donc la suite** (B_{2n}) **est décroissante**
- **1 pt :** $B_{2(n+1)+1} - B_{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \geqslant 0$**, donc la suite** (B_{2n+1}) **est croissante**
- **1 pt :** $B_{2n+1} - B_{2n} = -\frac{1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : les suites** (B_{2n}) **et** (B_{2n+1}) **sont adjacentes et donc convergent vers une même limite** L**. Par propriété de recouvrement, la suite** (B_n) **converge vers** L

15. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{2n+1} = v_{2n+1} - v_n + \ln(2)$. En déduire la limite de la suite (B_n).

- **1 pt :** $B_{2n+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{2p}}{2p+1} + \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}$
- **1 pt :** $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k+1} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)+1}$
- **1 pt :** $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} = v_{2n+1} + \ln(2) - \ln(n+1) - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}$**, d'où** $B_{2n+1} = v_{2n+1} - v_n + \ln(2)$
- **1 pt : d'après *12*, les suites** (v_n) **et** (v_{2n+1}) **convergent vers** ℓ**. La suite** (B_{2n+1}) **est donc convergente de limite** $\ln(2)$
- **1 pt : d'après *14*, la suite** (B_n) **converge vers** $\ln(2)$

16. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |B_{2n} - \ln(2)| \ \leqslant\ B_{2n} - B_{2n+1} \quad \text{et} \quad |B_{2n+1} - \ln(2)| \ \leqslant\ B_{2n} - B_{2n+1}$$

- **1 pt : la suite** (B_{2n}) **est décroissante de limite** $\ln(2)$**. Par théorème de la limite monotone... D'où :** $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{2n} = \ln(2)$
- **1 pt :** $|B_{2n} - \ln(2)| \leqslant B_{2n} - B_{2n+1} \ \Leftrightarrow\ \ln(2) \geqslant B_{2n+1}$
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{2n+1} \leqslant \ln(2)$ **car...**
- **1 pt :** $|B_{2n+1} - \ln(2)| \leqslant B_{2n} - B_{2n+1}$

17. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |B_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

- **1 pt : par disjonction de cas en utilisant *12***

IV.3. Accélération de convergence

On veut mettre en place une méthode permettant, à partir d'une suite réelle convergente, de construire une nouvelle suite réelle admettant la même limite mais convergeant vers cette limite bien plus rapidement que la suite initiale.
L'objectif de cette partie est de montrer en toute généralité comment construire la nouvelle suite puis de démontrer les propriétés d'accélération de convergence de cette construction sur l'exemple de la suite (B_n) de la partie IV.2.

Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle suite notée $b^{(k)}$, ou $(b_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, de la manière suivante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n^{(0)} = b_n$,
- pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $b_n^{(k+1)} = b_n^{(k)} + b_{n+1}^{(k)}$.

On note de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n \; = \; \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \text{et} \quad C_n \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{b_0^{(k)}}{2^{k+1}}$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - 1$

19. Démontrer par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(k)$ où :

$$\mathscr{P}(k) \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ b_n^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_{n+r}$$

On pourra utiliser le triangle de Pascal.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  × **1 pt : hypothèse de récurrence + décalage d'indice**
  × **1 pt : triangle de Pascal**
  × **1 pt : fin du calcul**

20. Démontrer que, pour tout $(r, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n \geqslant r$, on obtient :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} \; = \; \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r}$$

- **1 pt : initialisation avec *18***
- **3 pts : hérédité**

21. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n \; = \; \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k$$

- **1 pt :** $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \left(\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_r \right)$ **(d'après *19*)**
- **1 pt :** $C_n = \sum\limits_{r=0}^{n} \left(\sum\limits_{k=r}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{r} b_r \right)$ **(interversion de sommes)**
- **1 pt :** $C_n = \sum\limits_{r=0}^{n} b_r \left(\frac{1}{2^{n+1}} \sum\limits_{k=r}^{n} \binom{n+1}{k+1} \right)$ **(d'après la question précédente)**
- **1 pt : fin du calcul (nouvelle interversion de sommes)**

22. Démontrer que, si la suite (B_n) est convergente, il en est de même de la suite (C_n). De plus, dans ce cas, les deux suites ont même limite.
On pourra utiliser la propriété énoncée au début du problème.

- **1 pt :** $C_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \times \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}}$ **(d'après *18*)**
- **1 pt : on note :** $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,k} = \begin{cases} \binom{n+1}{k+1} & \textbf{si } k \leqslant n \\ 1 & \textbf{si } k > n \end{cases}$
- **1 pt : vérification des hypothèses de la propriété fournie par l'énoncé :**
  - × $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,k} > 0$,
  - × **d'après *18* :** $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
  - × $B_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L$.

23. Dans cette question, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

On utilise alors à nouveau, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(b_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ (définie en partie IV.3.), la suite (B_n) (définie en partie IV.2.) et la suite (C_n) (définie en partie IV.3.).
L'objectif de cette question est de montrer que la convergence de la suite (C_n) vers sa limite est bien plus rapide que celle de la suite (B_n).

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 (1-t)^k \, dt = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1}$$

- **1 pt : la fonction** $t \mapsto (1-t)^k$ **est continue sur le** `SEGMENT` $[0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^k \, dt$ **est donc bien définie.**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^k \, dt = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^r \int_0^1 t^r \, dt$ **(par binôme de Newton et linéarité de l'intégrale)**
- **1 pt : fin du calcul**

b) En déduire une expression très simple de la somme apparaissant à droite de l'égalité obtenue en question précédente.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^k \, dt = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{(-1)^r}{r+1}$

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\, 2^{k+1}}$.

- **1 pt :** $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{k+1}} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} b_r \right)$ **(d'après *19*)**
- **1 pt : fin de calcul avec la question précédente (car,d'après l'énoncé, dans cette question :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$**)**

d) Démontrer, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $m > n$:

$$0 \leqslant C_m - C_n \leqslant \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k+1}}$$

- **1 pt :** $C_m - C_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)\, 2^{k+1}} \geqslant 0$
- **1 pt : pour tout** $k \in [\![n+1, m]\!]$, $\dfrac{1}{(k+1)\, 2^{k+1}} \leqslant \dfrac{1}{(n+2)\, 2^{k+1}}$
- **1 pt : En sommant les inégalité précédentes pour** k **variant de** $n+1$ **à** m**, on obtient...**

e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \ln(2) - C_n \leqslant \frac{1}{(n+2)\, 2^{n+1}}$$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \dfrac{1}{2^{m-n-1}}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$
- **1 pt : utilisation de la question *22* pour démontrer :** $\lim\limits_{m \to +\infty} C_m = \lim\limits_{m \to +\infty} B_m = \ln(2)$
  - × **d'après les questions *14* et *15*, la suite** (B_m) **est convergente de limite** $\ln(2)$**.**
  - × **on est dans le cadre d'application de la question *22* en notant :** $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$**.**

f) Comparer les vitesses de convergence de (B_n) et (C_n) vers leur limite commune.

- **1 pt : La suite** (C_n) **converge donc (exponentiellement) plus vite vers** $\ln(2)$ **que la suite** (B_n)**.**
  - × **D'après la question *17*, la suite** (B_n) **converge vers** $\ln(2)$ **à vitesse** $\dfrac{1}{n+1}$**.**
  - × **D'après la question précédente, la suite** (C_n) **converge vers** $\ln(2)$ **à vitesse** $\dfrac{1}{(n+2)\, 2^{n+1}}$**.**