DS4 /112

⚠ On traitera OBLIGATOIREMENT les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 5. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /16

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' - \frac{1}{x}\, y \; = \; \frac{x}{1+x^2} \qquad (E_1)$$

- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (H_1) **est :** $\{x \mapsto \lambda\, x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ **car on résout** (H_1) **sur** $\mathbb{R}_+^*$**.**
- **3 pts : méthode de variation de la constante**
  - × **1 pt :** $h : x \mapsto \lambda(x)\, x$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}_+^*$
  - × **1 pt :** h **solution de** $(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
  - × **1 pt : la fonction** $\lambda : x \mapsto \arctan(x)$ **convient**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (E_1) **sur** $\mathbb{R}_+^*$ **est** $\{x \mapsto x\, \arctan(x) + \lambda\, x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

2. $(*)$ Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + y' + 2y \; = \; \mathrm{e}^x \qquad (E_2)$$

- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (H_2) **est**
  $\{x \mapsto \lambda_1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) + \lambda_2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \sin\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$
- **1 pt :** $h : x \mapsto \dfrac{1}{4}\, \mathrm{e}^x$ **est une solution particulière de** (E_2)
- **1 pt : l'ensemble des solutions de** (E_2) **est**
  $\{x \mapsto \dfrac{1}{4}\, \mathrm{e}^x + \lambda_1\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \cos\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) + \lambda_2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, t} \sin\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, t\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

3. On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\, |f(x)| \mid x \in [0,1]\}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

- **3 pts : 1 pt par propriété**

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

- **1 pt : pour tout** $f \in E$, $\|f\|_\infty$ **existe**
- **1 pt : si** $\lambda = 0$**, alors l'inégalité est vérifiée**
- **2 pts : cas** $\lambda \neq 0$
  - × **1 pt :** $\|\lambda \cdot f\|_\infty \leqslant |\lambda|\ \|f\|_\infty$
  - × **1 pt :** $\|\lambda \cdot f\|_\infty \geqslant |\lambda|\ \|f\|_\infty$

4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt**

Exercice 2 /24

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

5. $(*)$ En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).

- **1 pt : la suite (u_n) est croissante**
- **3 pts : la suite (u_n) n'est pas majorée**
  - × **1 pt : (u_n) converge vers une limite ℓ par théorème de convergence monotone**
  - × **1 pt : par passage à la limite : $\ell = \ell + \ell^2$ donc $\ell = 0$**
  - × **1 pt : par croissance de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant a$. Donc : $\ell \geqslant a > 0$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par théorème de convergence monotone**

6. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ \ln(u_n)$.

a) Prouver : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

- **1 pt : la suite (v_n) est bien définie**
- **1 pt : $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{u_{n+p}} + 1\right)}{2^{n+p+1}}$**
- **1 pt : $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}}\ \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right) \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{u_{n+p}} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$ (par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$)**
- **1 pt : par croissance de (u_n) et décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{u_{n+p}} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$**

b) En déduire que pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

- **1 pt : en sommant les encadrements précédents pour p variant entre 0 et k :**

$$0 \ \leqslant\ v_{n+k+1} - v_n \ \leqslant\ \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}}\ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

- **1 pt : $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}}\ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2^n}\ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$**
- **1 pt : par transitivité :**

$$0 \ <\ v_{n+k+1} - v_n \ \leqslant\ \frac{1}{2^n}\ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \ \leqslant\ \frac{1}{2^n}\ \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

- **1 pt : d'après la question précédente appliquée à $k = 0$, la suite (v_n) est strictement croissante.**
- **1 pt : d'après la question précédente appliquée à $k = p - 1$ et $n = 0$, la suite (v_n) est majorée par $\ln\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)$**

7. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$.

- **1 pt : en passant à la limite quand $k \to +\infty$ dans *6b* :**

$$0 \;\leqslant\; L - v_n \;\leqslant\; \frac{1}{2^n}\, \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

- **1 pt : par croissance de exp sur $\mathbb{R}$:**

$$1 \;\geqslant\; \mathbf{e}^{2^n\,(v_n - L)} \;\geqslant\; \mathbf{e}^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)}$$

- **1 pt :** $\dfrac{1}{1+\frac{1}{u_n}} \leqslant \dfrac{u_n}{t_n} \leqslant 1$ **(+ théorème d'encadrement en utilisant :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$**)**

8. On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.

a) Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

- **1 pt :** $s_{n+1} = s_n^2 + (2\,s_n - 1)\,u_n$

b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.

- **1 pt :** $s_n = t_n - u_n = u_n\left(\dfrac{t_n}{u_n} - 1\right)$
- **1 pt : avec *7*, on obtient :** $0 \leqslant s_n \leqslant 1$

c) Montrer qu'il existe un réel b tel que : $u_n = t_n + b + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

- **1 pt :** $u_n = t_n + b + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \Leftrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = -b$
- **1 pt : d'après la question précédente :** $-1 \leqslant s_{n+1} - s_n^2 \leqslant 1$
- **1 pt : d'après *8a* et comme $u_n > 0$:** $-\dfrac{1}{u_n} \leqslant 2\,s_n - 1 \leqslant \dfrac{1}{u_n}$
- **1 pt : théorème d'encadrement en utilisant *5***

Problème 1 /31

On convient que, pour tout réel x, on a : $x^0 = 1$.

9. $(*)$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n \;=\; \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \quad \text{et} \quad J_n \;=\; \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

- **1 pt : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ car... donc l'intégrale I_n est bien définie.**
- **0 pt : existence de J_n**

10. $(*)$ Calculer I_0 et I_1.

- **1 pt :** $I_0 = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $I_1 = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$

11. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n$.

- **1 pt :** $I_{n+2} + 2\,I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$

b) En déduire I_2.

- **1 pt :** $I_2 = \dfrac{3}{2} - 2\,\ln(2)$

c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```python
import numpy as np

def valeur_In(n) :
    a = 1/2
    b = np.log(2) - 1/2
    for k in range(2,n+1) :
        aux = a
        a = ------
        b = ------
    return b
```

- **1 pt :**

```python
        a = b
```

- **1 pt :**

```python
        b = 1/((k-2)+1) - 2 * a + aux
```

12. ***a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

- **1 pt : théorème d'encadrement**

13. $(*)$ Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n\,J_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt**

14. ***a)*** Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n.

- **1 pt :** $J_0 = \ln(2)$
- **1 pt :** $J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

b) En déduire la valeur de J_1.

- **1 pt :** $J_1 = 1 - \ln(2)$

15. En utilisant les questions ***13*** et ***14***, compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 def valeur_In_2(n) :
2     J = np.log(2)
3     for k in range(1,n) :
4         J = ------
5     I = ------
6     return I
```

- **1 pt :**

```
4         J = 1/k - J
```

- **1 pt :**

```
5     I = n * J - 1/2
```

16. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

17. ***a)*** Utiliser les questions ***12b*** et ***13*** pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

- **1 pt : d'après *13* :** $J_{n-1} = \dfrac{I_n}{n} + \dfrac{1}{2n}$. **Donc d'après *12b* :** $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

b) En déduire la nature de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \geqslant 1}$ ainsi que la valeur de sa limite.

- **1 pt : continuité de** $x \mapsto |x|$ **en** 0

c) Utiliser la question ***13*** pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha\, n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- **1 pt : comme** $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$**, d'après *13* :** $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\, J_n = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt : comme** $\dfrac{1}{2} \neq 0$ **:** $J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

18. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \ln(2) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- **1 pt :** $J_n = (-1)^n\, u_n$ **donc** $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{J_n}{(-1)^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$

b) Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k} \right)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

- **1 pt : Comme la suite** $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \geqslant 1}$ **est convergente d'après ??, on en déduit que la suite** $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2\,k} \right)_{n \geqslant 1}$ **est convergente.**

19. On se propose de montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)\, u_{k+1} - k\, u_k + (-1)^k$.

- **1 pt**

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \;=\; (n+1)\, u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

- **1 pt : en sommant les égalités de la question précédente pour k variant de 1 à n, par télescopage :** $S_n = (n+1)\, u_{n+1} - u_1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k = \dfrac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)$

c) Démontrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

- **2 pts :** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$
  - × **1 pt :** $S_{2n} = (2n+1)\, u_{2n+1} - u_1 = (2n+1)\, u_{2n+1} - \ln(2) + 1$
  - × **1 pt : d'après *18a* :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\, u_{2n+1} = -\dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ **car :** $S_{2n+1} = (2n+2)\, u_{2n+2}\, u_{2n+2} - \ln(2)$
- **1 pt : propriété de recouvrement**

Problème II /41

L'objet de ce problème est d'étudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax \tag{a}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Étude de l'équation (E_a)

20. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.

a) Montrer que si $a \in \,]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in \,]0,1]$.

- **1 pt :** $f : \ln(x) - ax$ **est dérivable sur** $]0,+\infty[$ **et** $f' : x \mapsto \dfrac{1}{x} - a$**. De plus, comme** $a \leqslant 0$**, on obtient le tableau de variations suivant.**

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

- **2 pts : théorème de la bijection**
  - × **1 pt : hypothèses et** $f\big(]0,+\infty[\big) =]-\infty,+\infty[$
  - × **1 pt :** $0 \in]-\infty,+\infty[$
- **1 pt :** $f(\alpha) \leqslant f(1)$ **et d'après le théorème de la bijection, la fonction** $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**. On en déduit :** $\alpha \in]0,1]$

b) Montrer que si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e,+\infty[$.

- **1 pt : étude de** f **(dont** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ **par croissances comparées)**

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln(a)-1$	$\searrow$	$-\infty$

- **1 pt : théorème de la bijection dont la démonstration de :** $0 \in]-\infty, -\ln(a)-1[$ **(car :** $a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$**)**
- **1 pt :** $f(1) < f(\alpha) < f(\mathrm{e})$ **et d'après le théorème de la bijection, la fonction** $g = \left(f_{|]0,\frac{1}{a}[}\right)^{-1} :]-\infty, -\ln(a)-a[\to]0, \frac{1}{a}[$ **est strictement croissante sur** $]-\infty, -\ln(a)-1[$**. Donc :** $1 < \alpha < \mathrm{e}$
- **0 pt : raisonnement similaire pour** β

c) Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.

- **1 pt : e est solution**
- **1 pt : unicité grâce au TV de** f

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d) Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.

- **1 pt :** $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a) - 1 < 0$

21. Illuster sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0], a \in]0, \frac{1}{e}[$, $a = \frac{1}{e}$ et $a > \frac{1}{e}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$).

- **1 pt : courbes de** $\ln$ **et** $x \mapsto ax$ **(dont tangente)**
- **2 pt : intersections entre les courbes**
- **1 pt : position des abscisses des points d'annulation**

Partie II. Étude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (R)$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

22. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).

- **1 pt : fonction nulle et fonction constante égale à** 1

23. Soit φ une solution de (R). Démontrer :

$$\varphi(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 0$$

- **1 pt :** $(\Rightarrow)$
- **1 pt :** $(\Leftarrow)$

24. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.

a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) > 0$.

- **1 pt : en choisissant** $x = y = 0$ **dans** (R) **:** $\varphi(0) = 1$
- **1 pt :** $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$
- **1 pt :** $1 = \varphi(0) = \varphi(x - x) = \varphi(x)\,\varphi(-x)$ **donc** $\varphi(x) \neq 0$

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(nx) = (\varphi(x))^n$$

- **3 pts :** $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(nx) = (\varphi(x))^n$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **1 pt :** $\varphi(-nx) = \big(\varphi(-x)\big)^n$ **et** $\varphi(-x) = \big(\varphi(x)\big)^{-1}$ **(d'après** ***24a*****)**

c) Montrer :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$$

- **1 pt : on applique la question précédente à** $n = m$ **et** $x = \dfrac{1}{m}$

d) Déduire des questions précédentes :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}$$

- **1 pt :** $\varphi\left(\dfrac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^n\ \varphi\left(\dfrac{1}{m}\right)$
- **1 pt : avec** ***24c*** **:** $\big(\varphi(1)\big)^{\frac{1}{m}} = \varphi\left(\dfrac{1}{m}\right)$

e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor\, 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).

- **1 pt : par définition de la partie entière :** $x - \dfrac{1}{10^n} < x_n \leqslant x$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

f) Conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = (\varphi(1))^x$$

- **1 pt : d'après la question précédente et** ***24d*** **:** $\varphi(x_n) = \big(\varphi(1)\big)^{x_n}$
- **1 pt : par continuité de** φ **en** $x \in \mathbb{R}$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$
- **1 pt : par continuité de** $\exp$ **en** $x \ln\big(\varphi(1)\big)$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\varphi(1)\big)_{x_n} = \big(\varphi(1)\big)^x$

Partie III. Étude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X+n)^{n-1}$$

25. ***a)*** Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

- **1 pt :** $P_1(X) = X$
- **1 pt :** $P_2(X) = \dfrac{1}{2}\ X\ (X+2)$

b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **1 pt : si** $n = 0$**,** $P_0(0) = 1$
- **1 pt : si** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $P_n(0) = 0$

26. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).$$

- **1 pt**

27. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt :** $P_{n+1}(x+y) \ = \ P_{n+1}(x+0) + \displaystyle\int_0^y \ P_{n+1}'(x+t)\ dt$
  - × **2 pts : reste du calcul**