DS3 /104

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 10. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /14

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt : décalage d'indice**
  - × **1 pt : triangle de Pascal**
  - × **1 pt : obtention de la formule finale**

2. Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.
Soient A_1 et A_2 des parties de F.

a) Démontrer :

$$g \circ f \text{ est surjective } \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective}$$

- **1 pt**

b) Démontrer :

$$f(A_1 \cup A_2) \; = \; f(A_1) \cup f(A_2)$$

- **2 pts : 1 pt par inclusion**

c) Démontrer que f est surjective si et seulement si : $\forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.

- **2 pts :** $(\Rightarrow)$ **(1 pt par inclusion)**
- **1 pt :** $(\Leftarrow)$

3. ***a)*** $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^4(x)$.

- **1 pt : formule du binôme et simplification**
- **1 pt :** $\sin^4(x) = \dfrac{1}{8}\,\big(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 2\big)$

b) $(*)$ En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\, dx$.

- **1 pt : La fonction** $x \mapsto \sin^4(x)$ **est continue sur le** `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$**.**
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\, dx$ **est donc bien définie.**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\, dx = \frac{3\pi}{16}$

Exercice 2 /13

On note : $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On note de plus :

$$f : \begin{array}{rcl} D & \to & D \\ z & \mapsto & -z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z} \end{array}$$

4. Quelle est la représentation géométrique dans le plan de l'ensemble D ?

- **1 pt : La représentation géométrique dans le plan de l'ensemble D est le disque ouvert de centre O (l'origine du plan) et de rayon 1.**

5. Démontrer : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\left|-z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}\right| = |z|$.

- **1 pt :** $\left|-z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}\right|^2 = |z|^2$
- **1 pt : injectivité de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$**

6. En déduire que f est bien définie.

- **1 pt : pour tout $z \in D$: $|z| < 1$. En particulier : $z \neq 1$. Donc $f(z)$ est bien défini.**
- **1 pt : $\forall z \in D$, $f(z) \in D$ (en utilisant la question précédente)**

7. Résoudre l'équation (E) : $f(z) = z$ d'inconnue $z \in D$.

- **1 pt : 0 est solution de (E)**
- **1 pt : si $z \neq 0$:** $f(z) = z \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\,(z) = 1$

8. Montrer que f est une involution de D, c'est-à-dire : $f \circ f = \mathrm{id}_D$.

- **1 pt :** $1 - f(z) = \dfrac{1-|z|^2}{1-z}$
- **1 pt : autres calculs pour obtenir $(f \circ f)(z) = z$**

9. $(*)$ En déduire que f est bijective et préciser sa bijection réciproque.

- **1 pt : D'après la question précédente : $f \circ f = \mathrm{id}_D$. Ainsi, l'application f est bijective, de bijection réciproque : $f^{-1} = f$**

10. Soit $r \in [0, 1[$. On note : $\mathscr{C}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Démontrer : $f\big(\mathscr{C}_r\big) = \mathscr{C}_r$.
*On pourra notamment utiliser les questions **5** et **8**.*

- **1 pt : $f\big(\mathscr{C}_r\big) \subset \mathscr{C}_r$ (avec 5)**
- **2 pts : $\mathscr{C}_r \subset f\big(\mathscr{C}_r\big)$**
  - × **1 pt : utilisation du caractère involutif de f**
  - × **1 pt : reste du raisonnement**

Problème I /28

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \quad f(x) \;=\; \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle : $2 < e < 3$.

11. a) $(*)$ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) \;=\; \frac{(x-1)}{2x}\, f(x)$$

- **1 pt : f est dérivable sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : $f'(x) \;=\; \dfrac{(x-1)}{2x}\, f(x)$**

b) $(*)$ Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

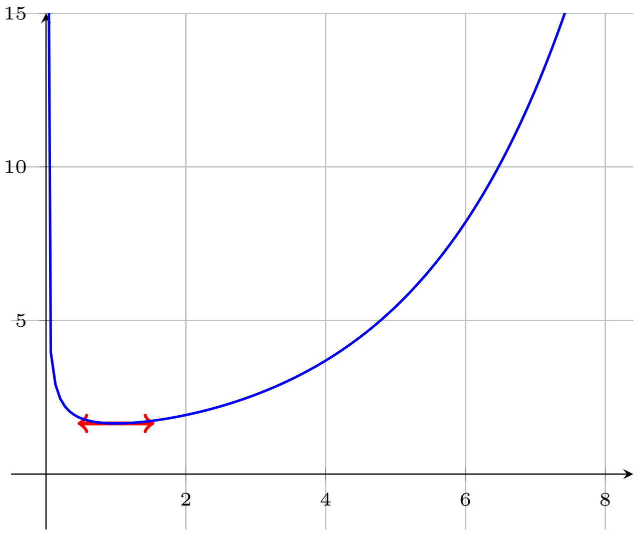
- **1 pt : TV**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**

c) $(*)$ Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : tangente en 1**
  - × **1 pt : asymptote verticale en 0**
  - × **1 pt : reste de la courbe**



d) $(*)$ Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 \ < \ u_n \ < \ 1 \ < \ v_n$$

- **3 pts : sur $]0, 1[$**
  - × **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
  - × **1 pt : $f\big(]0,1[\big) \ = \ ]\lim\limits_{x \to 1} f(x), \lim\limits_{x \to 0} f(x)[\ = \ ]\sqrt{\mathbf{e}}, +\infty[$**
  - × **1 pt : $n \in]\sqrt{\mathbf{e}}, +\infty[$ (en effet $n \geqslant 2$ et $2 > \sqrt{\mathbf{e}} \ \Leftrightarrow \ 4 > \mathbf{e}$ et cette dernière inégalité est vérifiée)**
- **1 pt : sur $]1, +\infty[$**
- **1 pt : $f(1) = \sqrt{\mathbf{e}} \notin \mathbb{N}$.**
  Ainsi, l'équation $x = 1$ n'est pas solution de l'équation $f(x) = 1$.

12. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante.

- **1 pt : $f(v_n) = n \ \leqslant \ n+1 = f(v_{n+1})$**
- **1 pt : $v_n > 1$, $v_{n+1} > 1$ et la bijection réciproque de $f_{|]1,+\infty[}$ est strictement croissante sur $]\sqrt{\mathbf{e}}, +\infty[$**

b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **1 pt : passage à la limite dans $f(v_n) = n$ (dont continuité de f en ℓ)**
- **1 pt : théorème de convergence monotone pour démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$**

13. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.

- **1 pt**

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge.

- **1 pt : la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0**

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

- **1 pt : passage à la limite dans $f(u_n) = n$**

d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \, u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : $f(u_n) = n$ donc $n^2 \ u_n \ = \ \left(\mathbf{e}^{\frac{u_n}{2}}\right)^2$**
- **1 pt : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \, u_n = 1$**

14. a) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε.
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leqslant n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
  Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.

- On renvoie finalement la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps) :
    a = 0
    b = 1
    while __________ :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            __________
        else :
            __________
    return (a+b)/2
```

- **3 pts : 1 pt par ligne**

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps) :
    a = 0
    b = 1
    while (b-a) > eps :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2
```

b) Écrire une fonction en langage **Python**, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.
On pourra faire appel à la fonction `approx_u` *définie à la question précédente.*

- **2 pts**

```
def sp(N, eps) :
    S = 0
    for n in range(2, N+1) :
        S = S + approx_u(n, eps/(N-1))
    return S
```

Problème II /49

On considérera $\mathbb{C}$ en bijection avec le plan complexe. Étant donnés quatre nombres complexes deux à deux distincts a, b, c et d, on définit leur birapport $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$ par :

$$[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \;=\; \frac{(c-a)\,(d-b)}{(d-a)\,(c-b)}$$

15. ***a)*** Expliciter le birapport $[1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i]$.

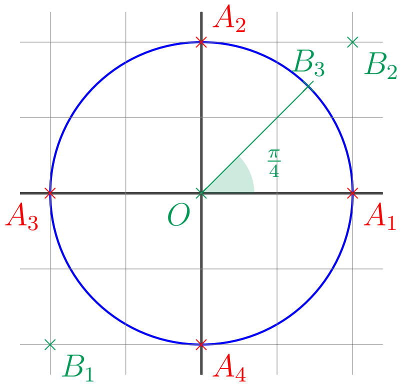
- **1 pt :** $[1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i] = 2$

b) $(*)$ Expliciter le birapport $\left[0\,;\,-1-i\,;\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,;\,1+i\right]$.
On commencera par écrire les complexes non nuls en fonction de $e^{i\frac{\pi}{4}}$*).*

- **1 pt :** $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ **et** $-1-i = -(1+i) = -\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$
- **1 pt :** $\left[0\,;\,-1-i\,;\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,;\,1+i\right] = \dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$

c) $(*)$ Représenter l'image de ces 8 complexes sur une même figure (on représentera également l'image de l'ensemble $\mathbb{U}$).

- **1 pt : placement des images de** 1**,** i**,** -1**,** $-i$ **et** 0**.**
- **1 pt : placement des images de** $-1-i$**,** $1+i$ **et** $\mathbb{U}$**.**
- **1 pt : placement de l'image de** $e^{i\frac{\pi}{4}}$**.**



16. Soient a, b, c et d quatre complexes deux à deux distincts. On note A, B, C et D leur image respective dans le plan complexe.
On suppose que A, B et C sont alignés. Démontrer que A, B, C et D sont alignés si et seulement si $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R}$.

- **1 pt :** A**,** B **et** C **sont alignés. Il existe donc** $\lambda \in \mathbb{R}$ **tel que :** $c-a = \lambda\,(c-b)$**. Or** $c \neq b$**, donc :** $\dfrac{c-a}{c-b} = \lambda$
- **1 pt :** A**,** B**,** C **et** D **sont alignés** $\Leftrightarrow$ A**,** B **et** D **sont alignés (car** A**,** B **et** C **le sont déjà)**
- **1 pt :** $\cdots \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R},\ \dfrac{d-b}{d-a} = \mu$ **(car :** $d \neq a$**)**
- **1 pt :** $\cdots \Leftrightarrow \dfrac{(d-b)\,(c-a)}{(d-a)\,(c-b)} \in \mathbb{R}$ **(car, d'après le point précédent :** $\dfrac{c-a}{c-b} = \lambda \in \mathbb{R}$**)**

17. ***a)*** Soient $(\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma')$ tels que $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$. Montrer que α et α' ne peuvent pas être tous les deux nuls, et montrer que le système linéaire suivant d'inconnues x et y admet une unique solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array}\right.$$

On distinguera 3 cas : $\alpha=0$, $\alpha'=0$ et α et α' sont non nuls.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde pour démontrer que α et α' ne peuvent pas être tous les deux nuls**
- **2 pts : cas $\alpha=0$**
  - × **1 pt : dans ce cas, $\alpha'\neq 0$ et $\beta\neq 0$**
  - × **1 pt : l'unique solution du système de l'énoncé est : $\left(\dfrac{\beta\,\gamma'-\beta'\,\gamma}{\alpha'\,\beta},\ \dfrac{\gamma}{\beta}\right)$**
- **1 pt : si $\alpha'=0$, alors l'unique solution du système de l'énoncé est : $\left(\dfrac{\gamma'}{\alpha'},\ \dfrac{\alpha'\,\gamma-\alpha\,\gamma'}{\alpha'\,\beta}\right)$**
- **1 pt : si $\alpha\neq 0$ et $\alpha'\neq 0$, alors l'unique solution du système de l'énoncé est : $\left(\dfrac{\beta'\,\gamma-\beta\,\gamma'}{\alpha\,\beta'-\alpha'\,\beta},\ \dfrac{\alpha\,\gamma'-\alpha'\,\gamma}{\alpha\,\beta'-\alpha'\,\beta}\right)$**

b) Soient a, b et c trois complexes d'images respectives A, B et C. Supposons que A, B et C ne sont pas alignés. Montrer par le calcul qu'il existe un unique point Ω d'affixe ω tel que :

$$|\omega-a| \ = \ |\omega-b| \qquad \text{et} \qquad |\omega-a| \ = \ |\omega-c|$$

On ne demande pas d'expliciter les coordonnées de ω, simplement de prouver son existence et son unicité.

- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcl} |\omega-a| & = & |\omega-b| \\ |\omega-a| & = & |\omega-c| \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,(x_b-x_a)\,x & + & 2\,(y_b-y_a)\,y & = & x_b^2-x_a^2+y_b^2-y_a^2 \\ 2\,(x_b-x_a)\,x & + & 2\,(y_b-y_a)\,y & = & x_b^2-x_a^2+y_b^2-y_a^2 \end{array}\right. \qquad (*)$
- **1 pt : On note alors :**

$$\begin{array}{lll} \alpha=2\,(x_b-x_a), & \beta=2\,(y_b-y_a), & \gamma=x_b^2-x_a^2+y_b^2-y_a^2 \\ \alpha'=2\,(x_c-x_a), & \beta'=2\,(y_c-y_a), & \gamma'=x_c^2-x_a^2+y_c^2-y_a^2 \end{array}$$

Le système $(*)$ s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha\, x & + & \beta\, y & = & \gamma \\ \alpha'\, x & + & \beta'\, y & = & \gamma' \end{array}\right.$$

- **2 pts : $\alpha\,\beta'-\alpha'\,\beta\neq 0$**

18. Soient $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ et $z\in\mathbb{C}$. On suppose que les complexes $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts.

a) Traduire à l'aide de congruences les inégalités :

$$e^{i\alpha} \ \neq \ e^{i\beta}, \qquad e^{i\alpha} \ \neq \ e^{i\gamma} \qquad \text{et} \qquad e^{i\beta}\neq e^{i\gamma}$$

- **1 pt : $e^{i\alpha}\neq e^{i\beta} \ \Leftrightarrow \ \alpha\not\equiv\beta\ [2\pi]$, $\quad e^{i\alpha}\neq e^{i\gamma} \ \Leftrightarrow \ \alpha\not\equiv\gamma\ [2\pi]$ et $\quad e^{i\beta}\neq e^{i\gamma} \ \Leftrightarrow \ \beta\not\equiv\gamma\ [2\pi]$**

b) En déduire que $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls.

- **2 pts :** $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \neq 0$
  - × **1 pt : comme $\mathbf{e}^{i\alpha} \neq \mathbf{e}^{i\beta}$, alors :** $\alpha \not\equiv \beta \ [2\pi]$
  - × **1 pt :** $\cdots$ **donc** $\dfrac{\alpha-\beta}{2} \not\equiv 0 \ [\pi]$
- **0 pt :** $\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right) \neq 0$ **et** $\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right) \neq 0$

c) $(*)$ Démontrer :

$$\left[e^{i\alpha} \,;\, e^{i\beta} \,;\, e^{i\gamma} \,;\, z\right] \ = \ \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right)}{|z-e^{i\alpha}|^2}$$

- **1 pt : Tout d'abord, comme les complexes $\mathbf{e}^{i\alpha}$, $\mathbf{e}^{i\beta}$, $\mathbf{e}^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts d'après l'énoncé, alors le birapport $\left[\mathbf{e}^{i\alpha} \,;\, \mathbf{e}^{i\beta} \,;\, \mathbf{e}^{i\gamma} \,;\, z\right]$ est bien défini.**
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbf{e}^{i\gamma}-\mathbf{e}^{i\alpha}}{\mathbf{e}^{i\gamma}-\mathbf{e}^{i\beta}} \ = \ \dfrac{\mathbf{e}^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\left(\mathbf{e}^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}}-\mathbf{e}^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\right)}{\mathbf{e}^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}\left(\mathbf{e}^{-i\frac{\beta-\gamma}{2}}-\mathbf{e}^{i\frac{\beta-\gamma}{2}}\right)}$
- **1 pt : par formule d'Euler,** $\dfrac{\mathbf{e}^{i\gamma}-\mathbf{e}^{i\alpha}}{\mathbf{e}^{i\gamma}-\mathbf{e}^{i\beta}} \ = \ \mathbf{e}^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \, \dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}$
- **1 pt :** $\dfrac{z-\mathbf{e}^{i\beta}}{z-\mathbf{e}^{i\alpha}} \ = \ \dfrac{\left(z-\mathbf{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-\mathbf{e}^{-i\alpha}\right)}{\left|z-\mathbf{e}^{i\alpha}\right|^2}$

d) Démontrer qu'il existe un **réel** D, dépendant de z, α et β, vérifiant :

$$e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right) \ = \ |z|^2 \, e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + D$$

On justifiera bien pourquoi D est un réel.

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z-\mathbf{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-\mathbf{e}^{-i\alpha}\right) = \mathbf{e}^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \ |z|^2 - \mathbf{e}^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \ \overline{z} - \mathbf{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \ z + \mathbf{e}^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$
- **1 pt :** $-\mathbf{e}^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \ \overline{z} - \mathbf{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \ z = -\operatorname{Re}\left(\mathbf{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \ z\right)$
- **1 pt : On note alors :** $D = -\operatorname{Re}\left(\mathbf{e}^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \ z\right)$**. On a bien, par définition de la partie réelle :** $D \in \mathbb{R}$**. On obtient de plus l'égalité souhaitée**

e) Démontrer finalement :

$$\mathrm{Im}\left(\left[e^{i\alpha}\,;\,e^{i\beta}\,;\,e^{i\gamma}\,;\,z\right]\right) \;=\; \dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}\times\dfrac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}$$

- **1 pt : Comme** $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}\times\dfrac{1}{\left|z-\mathbf{e}^{i\alpha}\right|^2}\in\mathbb{R}$**, on en déduit, par linéarité de** $\mathrm{Im}\left(\cdot\right)$ **:**

$$\mathrm{Im}\left(\left[\mathbf{e}^{i\alpha}\,;\,\mathbf{e}^{i\beta}\,;\,\mathbf{e}^{i\gamma}\,;\,z\right]\right) \;=\; \dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}\times\dfrac{1}{|z-\mathbf{e}^{i\alpha}|^2}\,\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\times\left(z-\mathbf{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-\mathbf{e}^{-i\alpha}\right)\right)$$

- **1 pt : par linéarité de** $\mathrm{Im}\left(\cdot\right)$ **:**

$$\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\times\left(z-\mathbf{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-\mathbf{e}^{-i\alpha}\right)\right) \;=\; |z|^2\;\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)+\mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right)+\mathrm{Im}\left(D\right)$$

- **1 pt : fin du calcul**

f) En déduire : $\left[e^{i\alpha}\,;\,e^{i\beta}\,;\,e^{i\gamma}\,;\,z\right]\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{U}$.

- **1 pt : d'après la question précédente**

$$\left[\mathbf{e}^{i\alpha}\,;\,\mathbf{e}^{i\beta}\,;\,\mathbf{e}^{i\gamma}\,;\,z\right]\in\mathbb{R}\;\Leftrightarrow\;\mathrm{Im}\left(\left[\mathbf{e}^{i\alpha}\,;\,\mathbf{e}^{i\beta}\,;\,\mathbf{e}^{i\gamma}\,;\,z\right]\right)\;=\;0\;\Leftrightarrow\;\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}\times\dfrac{|z|^2-1}{|z-\mathbf{e}^{i\alpha}|^2}=$$

- **1 pt : d'après ??, ces** 3 **sinus sont non nuls**
- **1 pt : comme** z **et** $\mathbf{e}^{i\alpha}$ **sont distincts :** $\left|z-\mathbf{e}^{i\alpha}\right|\neq 0$

19. On se donne dans cette question quatre complexes a, b, c et d deux à deux distincts d'images respectives A, B, C et D. On suppose que trois points quelconques parmi A, B, C et D ne sont pas alignés. On note, comme dans la question ***17b***, Ω l'unique point d'affixe ω équidistant de A, B et C (il n'est pas demandé de redémontrer son existence, ni de donner ses coordonnées) et $R=|\omega-a|$.

a) Expliciter deux complexes λ et μ tels que $\lambda a+\mu=1$ et $\lambda\omega+\mu=0$.
On note dans la suite h la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $h : z\mapsto\lambda z+\mu$.

- **1 pt : comme** A **et** Ω **sont distincts :** $\omega-a\neq 0$
- **1 pt :** $\lambda=\dfrac{1}{a-\omega}$ **et** $\mu=\dfrac{\omega}{\omega-a}$

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|h(z)| = 1$ si et seulement si $|\omega - z| = R$. En déduire l'existence de trois réels α, β et γ vérifiant :

$$h(a) \;=\; \mathrm{e}^{i\alpha}, \qquad h(b) \;=\; \mathrm{e}^{i\beta} \qquad \text{et} \qquad h(c) \;=\; \mathrm{e}^{i\gamma}$$

- **2 pts :** $\big|h(z)\big| = 1 \;\Leftrightarrow\; |z-\omega| = R$
  - $\times$ **1 pt :** $\big|h(z)\big| = 1 \;\Leftrightarrow\; \left|\dfrac{1}{a-\omega}\,(z-\omega)\right| = 1$ **(d'après la question précédente)**
  - $\times$ **1 pt : le module du produit est égal au produit des modules, puis fin des équivalences**
- **1 pt : comme** $R = |\omega - a|$**, alors, d'après le point précédent :** $\big|h(a)\big| = 1$**. Il existe donc** $\alpha \in \mathbb{R}$ **tel que :** $h(a) = \mathbf{e}^{i\alpha}$
- **1 pt : comme** Ω **est équidistant de** A, B **et** C**, alors :** $A\Omega = B\Omega = C\Omega$**. Ainsi :**

$$R \;=\; |\omega - a| \;=\; |\omega - b| \;=\; |\omega - c|$$

c) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et déterminer sa bijection réciproque. En déduire que les complexes $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\mathrm{e}^{i\gamma}$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts.

- **1 pt : la fonction** h **est bijective, de bijection réciproque** $h^{-1} : u \mapsto \dfrac{u-\mu}{\lambda}$
- **1 pt : comme les points** A, B, C **et** D **sont deux à deux distincts, alors les complexes** a, b, c **et** d **sont deux à deux distincts.**
  Par injectivité de h**, on en déduit que les complexes** $h(a)$, $h(b)$, $h(c)$ **et** $h(d)$ **sont distincts.**
  D'après ??, on en conclut que les complexes $\mathbf{e}^{i\alpha}$, $\mathbf{e}^{i\beta}$, $\mathbf{e}^{i\gamma}$ **et** $h(d)$ **sont distincts.**

d) On pose $z = h(d)$. Démontrer :

$$\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right] \;=\; [a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$$

- **1 pt**

e) En déduire que $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$ est réel si et seulement si $|d-\omega| = R$, en d'autres termes si et seulement si D appartient au cercle de centre Ω et de rayon R.

- **1 pt : on peut effectivement appliquer la question ?? car, d'après ??, les complexes** $\mathbf{e}^{i\alpha}$, $\mathbf{e}^{i\beta}$, $\mathbf{e}^{i\gamma}$ **et** z **sont distincts.**
- **1 pt : d'après ??**

$$[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \left[\mathbf{e}^{i\alpha}\,;\,\mathbf{e}^{i\beta}\,;\,\mathbf{e}^{i\gamma}\,;\,z\right] \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{U}$$

- **1 pt :** $\cdots |\omega - d| = R$ **(d'après ??)**

On vient donc de montrer le résultat suivant :

Quatre complexes distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.

20. Démontrer le théorème de Miquel :

$$(A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ alignés ou cocycliques}) \qquad \Leftrightarrow \qquad (A',\ B',\ C' \text{ et } D' \text{ alignés ou cocycliques})$$

- **4 pts**