DS3

> On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 10. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

2. Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.
Soient A_1 et A_2 des parties de F.

a) Démontrer :

$$g \circ f \text{ est surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective}$$

b) Démontrer :

$$f(A_1 \cup A_2) \;=\; f(A_1) \cup f(A_2)$$

c) Démontrer que f est surjective si et seulement si : $\forall Y \in \mathscr{P}(F),\ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$.

3. ***a)*** $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^4(x)$.

b) $(*)$ En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\ dx$.

Exercice 2

On note : $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. On note de plus :

$$\begin{array}{rccc} f & : & D & \to & D \\ & & z & \mapsto & -z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z} \end{array}$$

4. Quelle est la représentation géométrique dans le plan de l'ensemble D ?

5. Démontrer : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ \left|-z\,\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}\right| = |z|$.

6. En déduire que f est bien définie.

7. Résoudre l'équation $(E) : f(z) = z$ d'inconnue $z \in D$.

8. Montrer que f est une involution de D, c'est-à-dire : $f \circ f = \mathrm{id}_D$.

9. $(*)$ En déduire que f est bijective et préciser sa bijection réciproque.

10. Soit $r \in [0, 1[$. On note : $\mathscr{C}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Démontrer : $f\big(\mathscr{C}_r\big) = \mathscr{C}_r$.
*On pourra notamment utiliser les questions **5** et **8**.*

Problème I

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle : $2 < e < 3$.

11. ***a)*** $(*)$ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

b) $(*)$ Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

c) $(*)$ Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

d) $(*)$ Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0,+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

12. ***a)*** Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

13. ***a)*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to +\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

14. ***a)*** Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε.
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leqslant n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
  Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps) :
    a = 0
    b = 1
    while __________ :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            __________
        else :
            __________
    return (a+b)/2
```

b) Écrire une fonction en langage **Python**, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.
On pourra faire appel à la fonction `approx_u` *définie à la question précédente.*

Problème II

On considérera $\mathbb{C}$ en bijection avec le plan complexe. Étant donnés quatre nombres complexes deux à deux distincts a, b, c et d, on définit leur birapport $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$ par :

$$[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \;=\; \frac{(c-a)\,(d-b)}{(d-a)\,(c-b)}$$

Il existe $(x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$a = x_a + i\,y_a, \quad b = x_b + i\,y_b \quad \text{et} \quad c = x_c + i\,y_c$$

On note A, B et C les images respectives de a, b et c dans le plan complexe. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

$$A,\, B \text{ et } C \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad (x_b - x_a)\,(y_c - y_a) - (x_c - x_a)\,(y_b - y_a) \;=\; 0$$

15. ***a)*** Expliciter le birapport $[1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i]$.

b) $(*)$ Expliciter le birapport $\left[0\,;\,-1-i\,;\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,;\,1+i\right]$.
On commencera par écrire les complexes non nuls en fonction de $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$*).*

c) $(*)$ Représenter l'image de ces 8 complexes sur une même figure (on représentera également l'image de l'ensemble $\mathbb{U}$).

16. Soient a, b, c et d quatre complexes deux à deux distincts. On note A, B, C et D leur image respective dans le plan complexe.
On suppose que A, B et C sont alignés. Démontrer que A, B, C et D sont alignés si et seulement si $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \in \mathbb{R}$.

17. ***a)*** Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ tels que $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$. Montrer que α et α' ne peuvent pas être tous les deux nuls, et montrer que le système linéaire suivant d'inconnues x et y admet une unique solution.

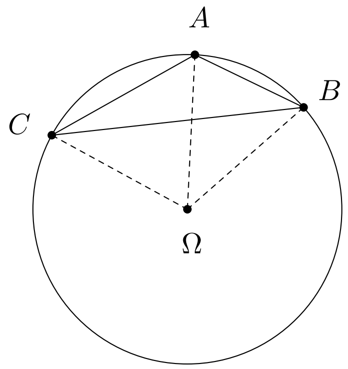
$$\begin{cases} \alpha\, x \;+\; \beta\, y \;=\; \gamma \\ \alpha'\, x \;+\; \beta'\, y \;=\; \gamma' \end{cases}$$

On distinguera 3 cas : $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ et α et α' sont non nuls.

b) Soient a, b et c trois complexes d'images respectives A, B et C. Supposons que A, B et C ne sont pas alignés. Montrer par le calcul qu'il existe un unique point Ω d'affixe ω tel que :

$$|\omega - a| \;=\; |\omega - b| \qquad \text{et} \qquad |\omega - a| \;=\; |\omega - c|$$

On ne demande pas d'expliciter les coordonnées de ω, simplement de prouver son existence et son unicité.



On note : $R = |\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$. On vient de montrer que les points A, B et C d'affixes a, b et c appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon R : ils sont dits cocycliques. On vient de redémontrer au passage que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes et que Ω est le centre du cercle circonscrit. **En particulier, on demande de ne pas utiliser ce résultat pour rèpondre à cette question.**

18. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que les complexes $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\mathrm{e}^{i\gamma}$ et z sont deux à deux distincts.

a) Traduire à l'aide de congruences les inégalités :

$$\mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\beta}, \qquad \mathrm{e}^{i\alpha} \neq \mathrm{e}^{i\gamma} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{i\beta} \neq \mathrm{e}^{i\gamma}$$

b) En déduire que $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls.

c) $(*)$ Démontrer :

$$\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right] \;=\; \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\left(z - \mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right)}{|z - \mathrm{e}^{i\alpha}|^2}$$

d) Démontrer qu'il existe un **réel** D, dépendant de z, α et β, vérifiant :

$$\mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z - \mathrm{e}^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - \mathrm{e}^{-i\alpha}\right) \;=\; |z|^2\, \mathrm{e}^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + \mathrm{e}^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + D$$

On justifiera bien pourquoi D est un réel.

e) Démontrer finalement :

$$\mathrm{Im}\left(\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right]\right) \;=\; \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2 - 1}{|z - \mathrm{e}^{i\alpha}|^2}$$

f) En déduire : $\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$.

19. On se donne dans cette question quatre complexes a, b, c et d deux à deux distincts d'images respectives A, B, C et D. On suppose que trois points quelconques parmi A, B, C et D ne sont pas alignés. On note, comme dans la question ***17b***, Ω l'unique point d'affixe ω équidistant de A, B et C (il n'est pas demandé de redémontrer son existence, ni de donner ses coordonnées) et $R = |\omega - a|$.

a) Expliciter deux complexes λ et μ tels que $\lambda a + \mu = 1$ et $\lambda\omega + \mu = 0$.
On note dans la suite h la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $h : z \mapsto \lambda z + \mu$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|h(z)| = 1$ si et seulement si $|\omega - z| = R$. En déduire l'existence de trois réels α, β et γ vérifiant :

$$h(a) = \mathrm{e}^{i\alpha}, \qquad h(b) = \mathrm{e}^{i\beta} \qquad \text{et} \qquad h(c) = \mathrm{e}^{i\gamma}$$

c) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et déterminer sa bijection réciproque. En déduire que les complexes $\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\beta}$, $\mathrm{e}^{i\gamma}$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts.

d) On pose $z = h(d)$. Démontrer :

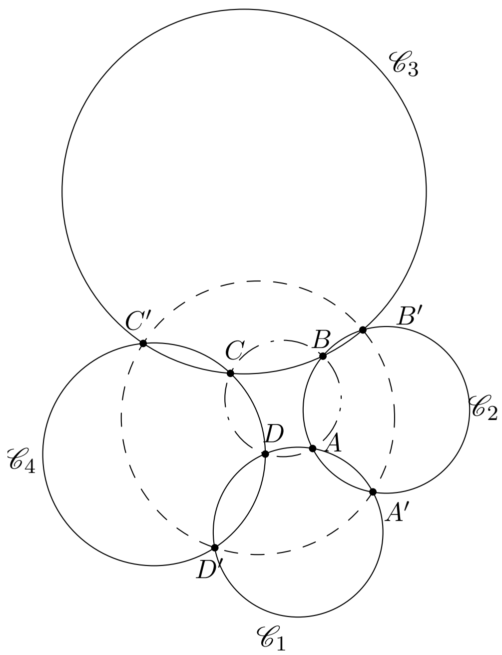
$$\left[\mathrm{e}^{i\alpha}\,;\,\mathrm{e}^{i\beta}\,;\,\mathrm{e}^{i\gamma}\,;\,z\right] = [a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$$

e) En déduire que $[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d]$ est réel si et seulement si $|d - \omega| = R$, en d'autres termes si et seulement si D appartient au cercle de centre Ω et de rayon R.

On vient donc de montrer le résultat suivant :

> Quatre complexes distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.

20. On cherche à présent à utiliser ce résultat pour démontrer le théorème de Miquel. On se donne pour cela quatre cercles $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$. On suppose que :



- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en deux points A et A' d'affixes respectives a et a'.
- $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ se coupent en B et B' d'affixes respectives b et b'.
- $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ se coupent en C et C' d'affixes respectives c et c'.
- $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_1$ se coupent en D et D' d'affixes respectives d et d'.

On suppose enfin que ces 8 points sont distincts.
On admet (cela découle d'un calcul immédiat) le théorème des six birapports :

$$[a\,;\,b\,;\,c\,;\,d] \times [c'\,;\,a'\,;\,d'\,;\,b'] \times [a'\,;\,b\,;\,a\,;\,b'] \times [b\,;\,c'\,;\,c\,;\,b'] \times [c\,;\,d'\,;\,c'\,;\,d] \times [d'\,;\,a\,;\,a'\,;\,d] = 1$$

Démontrer le théorème de Miquel :

$$(A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ alignés ou cocycliques}) \qquad \Leftrightarrow \qquad (A',\ B',\ C' \text{ et } D' \text{ alignés ou cocycliques})$$