DS2 /110

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /19

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$? Le démontrer.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

- **2 pts : analyse :**
  - × **1 pt :** $f(-x) = g(x) - h(x)$
  - × **1 pt :** $\begin{cases} g(x) & = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) & = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$
- **2 pts : synthèse**
  - × **1 pt :** g_0 **paire et** h_0 **impaire**
  - × **1 pt :** $f = g_0 + h_0$

3. Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E.

a) $(*)$ Démontrer :

$$A = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A$$

- **1 pt :** $A = A \cup B \Rightarrow B \subset A$
- **1 pt :** $B \subset A \Rightarrow A = A \cup B$

b) Démontrer : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

- **1 pt : cas** $x \in A \cap B$
- **2 pts : cas** $x \notin A \cap B$
  - × **1 pt : cas** $x \in \overline{A}$
  - × **1 pt : cas** $x \notin \overline{A}$

4. $(*)$ On note f la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(1 + x^5)$.
Démontrer que la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

- **2 pts**

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante : $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+j}$.

- **2 pts : cas** $a = 1$ $\left(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+j} = \dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)$
- **3 pts : cas** $a \neq 1$ $\left(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+1} = \dfrac{a^2\,(1-a^n)\,(1-a^{n+1})}{(1-a)^2\,(1+a)}\right)$

Exercice 2 /19

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k}$$

6. ***a)*** Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

- **1 pt :** $a_0 = 1$ **et** $a_1 = 1$
- **1 pt :** $a_2 = 2$ **et** $a_3 = 5$

b) Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

- **1 pt :** $S_0 = 1$ **et** $S_1 = 2$
- **1 pt :** $S_2 = 5$ **et** $S_3 = 14$

c) Que remarque-t-on ?

- **1 pt : conjecture :** $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = a_{n+1}$

7. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par un changement d'indice bien choisi, démontrer :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, a_{n-k}$$

- **1 pt**

b) En déduire : $2\,T_n = n\,S_n$.

- **1 pt : utilisation de la question précédente et de la linéarité de la somme**

8. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+2)\,a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n$.

- **1 pt :** $2\,(2n+1)\,a_n = \dfrac{2\,(2n+1)!}{(n+1)!\,n!}$
- **1 pt :** $(n+2)\,a_{n+1} = \dfrac{2\,(2n+1)!}{(n+1)!\,n!}$

9. ***a)*** En utilisant les questions précédentes, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n$$

- **1 pt :** $T_{n+1} + S_{n+1} = a_0\, a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\, a_k\, a_{n+1-k}$
- **1 pt :** $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2\, \sum_{k=0}^{n} \big(2k\, a_k a_{n-k} + a_k\, a_{n-k}\big)$
- **1 pt : utilisation de *7.b)* pour conclure**

b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+3}{2}\, S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\,S_n$$

- **1 pt : utilisation de *7.b)* et de la question précédente**

10. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

11. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser une récurrence forte.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

Problème 1 /36

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

12. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

- **1 pt : la fonction $h_n : t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$, car...**
  Elle admet donc une primitive H_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$
- **1 pt : $f_n : x \mapsto H_n(x) - H_n(0)$, donc f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$**
- **1 pt : $f_n' = h_n$**

13. Étudier les variations de f_n.

- **1 pt : $f_n'(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ x > 1$ (par stricte croissance de...)**
- **1 pt : TV**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_n	0	$\searrow$	$f_n(1)$	$\nearrow$	

14. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt : $f_n''(x) = \dfrac{(2n-1)\,x^{2n} + 2n\,x^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}$**
- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n''(x) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$**

15. ***a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n} - 1 \ \geqslant\ n\,(t^2 - 1)$.

- **1 pt : $t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \sum\limits_{k=0}^{n-1} t^{2k}$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} t^{2k} \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 = n$ (par croissance de...). D'où le résultat.**

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \dfrac{n}{2}\,(x-1)^2$.

- **1 pt :** $\dfrac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n\,(t-1)$ **d'après la question précédente et car** $t+1 \geqslant 0$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :** $\displaystyle\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\ dt \geqslant \frac{n}{2}\ (x-1)^2$
- **1 pt : utilisation de la relation de Chasles pour conclure**

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt : par théorème de comparaison :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

16. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

- **1 pt :** $f_n(0) = 0$
- **1 pt : comme** f_n **est strictement décroissante sur** $[0,1]$ **:** $f_n(1) < f_n(0) = 0$

17. $(*)$ Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

- **1 pt :** 0 **est solution de l'équation** $f_n(x) = 0$
- **1 pt : l'équation** $f_n(x) = 0$ **n'admet pas de solution sur** $]0,1]$ **par stricte décroissance de** f_n **sur** $]0,1]$
- **1 pt : hypothèse du théorème de la bijection sur** $]1,+\infty[$
- **1 pt :** $f_n\big(]1,+\infty[\big) =]f_n(1),+\infty[$
- **1 pt : comme** $f_n(1) < 0$**, alors** $0 \in\ ]f_n(1),+\infty[$

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

18. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

- **1 pt :** $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \displaystyle\int_0^x\ t^{2n}\,(t-1)\ dt$
- **1 pt :** $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}\left(\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

19. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

- **1 pt :** $x^{2n+1} > 0$ **car** $x > \dfrac{2n+2}{2n+1} > 0$
- **1 pt :** $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0\ \Leftrightarrow\ x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

- **1 pt : d'après la question précédente :** $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n) = 0$

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

- **1 pt :** $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$**, donc, avec la question précédente :** $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$
- **1 pt :** $x_n > 1$ **et** $x_{n+1} > 1$
- **1 pt : la bijection réciproque de** ${f_{n+1}}_{|]1,+\infty[}^{\ -1}$ **est strictement croissante sur** $]f_n(1), +\infty[$
- **1 pt : hypothèses du théorème de convergence monotone**

20. ***a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

- **1 pt : d'après *16.*,** $f_n(1) < 0$
- **1 pt : par croissance de** $x \mapsto x^{2n}$ **sur** $\mathbb{R}_+$ **:** $0 \leqslant t^{2n} \leqslant 1$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\ dt \geqslant \int_0^1 \frac{-1}{t+1}\ dt = -\ln(2)$

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***15.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de la suite (x_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

- **1 pt : d'après *17.*,** $x_n - 1 > 0$
- **1 pt : application de *15.b)* à** $x = x_n \geqslant 1$ **:** $f_n(x_n) \geqslant -\ln(2) + \dfrac{n}{2}\ (x_n - 1)^2$
- **1 pt : par croissance de la fonction** $\sqrt{\cdot}$ **sur** $\mathbb{R}_+$ **:** $|x_n - 1| \leqslant \sqrt{\dfrac{2\ \ln(2)}{n}}$
- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

Problème II /36

Partie A : Fonction tangente hyperbolique

On note th, la fonction tangente hyperbolique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

21. $(*)$ Démontrer que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

- **1 pt : la fonction** th **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **car...**
- **1 pt :** $' : x \mapsto \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)^2 = \dfrac{1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2}$

22. $(*)$ Déterminer la parité de th.

- **1 pt**

23. Dresser le tableau de variations complet de th. On justifiera les valeurs des limites qui y apparaissent.

- **1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) > 0$ et TV**

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\text{th}'(x)$	$+$	
Variations de th	-1 ↗	1

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{th}(x) = -1$

24. $(*)$ Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction th.

- **1 pt : asymptotes**
- **1 pt : tangente en** 0
- **1 pt : reste de l'allure de la courbe**

25. $(*)$ Justifier que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble qu'on déterminera.

- **1 pt : hypothèses du théorème de la bijection**
- **1 pt :** $\text{th}\big(\,]-\infty, +\infty[\,\big) \;=\;]-1, 1[$

26. Montrer que la bijection réciproque de la fonction th, notée th^{-1}, vérifie :

$$\forall x \in\,]-1, 1[, \quad \text{th}^{-1}(x) \;=\; \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

- **1 pt : en notant** $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}\, \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$**,** $\exp\big(g(x)\big) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
- **1 pt :** $\text{th} \circ g = \text{id}_{]-1,1[}$
- **1 pt : comme de plus, d'après *25.*, la fonction** th **est bijective de** $\mathbb{R}$ **sur** $]-1, 1[$**, on en déduit :** $\text{th}^{-1} = g$

27. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de th^{-1}.

- **1 pt : hypothèses du théorème de dérivabilité de la réciproque**
- **2 pts :** $\big(\text{th}^{-1}\big)' : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)\,(1+x)}$

Partie B : Fonction sigmoïde

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre **fixé**. On définit la fonction f_λ par :

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

28. Déterminer le domaine de dérivabilité de f_λ et calculer sa dérivée.

- **1 pt : la fonction** f_λ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **car...**
- **1 pt :** $f'_\lambda : x \mapsto -\dfrac{1 - \lambda\, \mathbf{e}^{-\lambda x}}{(1 + \mathbf{e}^{-\lambda x})^2}$

29. En déduire le sens de variation de f_λ et calculer les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$ (on distinguera trois cas).

- **2 pts : cas** $\lambda > 0$
  - × **1 pt :** $f'_\lambda(x) > 0$ + **TV**

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$	$+$
Variations de f_λ	$0 \nearrow 1$

  - × **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = 1$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = 0$
- **1 pt : si** $\lambda = 0$**, alors** f_λ **est constante égale à** $\dfrac{1}{2}$
- **2 pts : cas** $\lambda < 0$
  - × **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $f'_\lambda(x) < 0$ + **TV**

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
Signe de $f'_\lambda(x)$	$-$
Variations de f_λ	$1 \searrow 0$

  - × **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = 1$

30. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \mathrm{th}\left(\frac{\lambda\, x}{2}\right)$$

- **1 pt**

Partie C : Équation différentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées et dont les éventuelles solutions sont des **fonctions**. Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle d'inconnue f avec une condition initiale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f' & = & \lambda f\,(1-f) \\[2mm] f(0) & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \qquad (E)$$

On admettra qu'une solution de cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

31. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)} - 1$.
Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} g' + \lambda\, g = 0 \\[2mm] g(0) = 1 \end{array}\right. \qquad (E')$$

- **3 pts :** f **solution de** $(E) \Rightarrow g$ **solution de** (E')

- × **1 pt : g dérivable sur $\mathbb{R}$ car...**
- × **1 pt : $g' - \lambda\, g = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$**
- × **1 pt : $g(0) = 1$**

- **3 pts : f solution de $(E) \Leftarrow g$ solution de (E')**
  - × **1 pt : f dérivable sur $\mathbb{R}$ car... (dont la justification de : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + 1 \neq 0$)**
  - × **1 pt : $f' = \lambda\, f\,(1 - f)$**
  - × **1 pt : $f(0) = \dfrac{1}{2}$**

32. Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si g est la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$$

On pourra étudier la fonction $h : x \mapsto e^{\lambda\, x}\, g(x)$.

- **2 pts : g solution de $(E') \Rightarrow g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$**
  - × **1 pt : h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' : x \mapsto 0$. Ainsi la fonction h est constante**
  - × **1 pt : $h(0) = 1$ donc $h : x \mapsto 1$. D'où : $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$**
- **1 pt : g solution de $(E') \Leftarrow g : x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$**

33. À l'aide de la partie précédente, résoudre complètement l'équation (E).

- **1 pt : avec les questions *30.*, *31.* et *32.*, on obtient que l'unique solution de (E) est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ \mathrm{th}\left(\dfrac{\lambda\, x}{2}\right)$**