DS2

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$? Le démontrer.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

3. Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E.

a) $(*)$ Démontrer :

$$A = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A$$

b) Démontrer : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

4. $(*)$ On note f la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(1 + x^5)$.
Démontrer que la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante : $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a^{i+j}$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, a_{n-k}$$

6. ***a)*** Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

b) Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

c) Que remarque-t-on ?

7. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par un changement d'indice bien choisi, démontrer :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k\, a_{n-k}$$

b) En déduire : $2\,T_n = n\,S_n$.

8. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+2)\, a_{n+1} = 2\,(2n+1)\, a_n$.

9. ***a)*** En utilisant les questions précédentes, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\, S_n$$

b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+3}{2}\, S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\, S_n$$

10. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.

11. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser une récurrence forte.

Problème 1

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

12. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

13. Étudier les variations de f_n.

14. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

15. ***a)*** Démontrer : $\forall t \geqslant 1,\ t^{2n}-1 \ \geqslant\ n\,(t^2-1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \ \geqslant\ f_n(1) + \frac{n}{2}\,(x-1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

16. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

17. $(*)$ Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$$

18. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = \ x^{2n+1}\ \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

19. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

20. ***a)*** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question ***15.b)*** de la partie ***A***, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\,\ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de la suite (x_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Problème II

Partie A : Fonction tangente hyperbolique

On note th, la fonction tangente hyperbolique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{th} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$$

21. $(*)$ Démontrer que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

22. $(*)$ Déterminer la parité de th.

23. Dresser le tableau de variations complet de th. On justifiera les valeurs des limites qui y apparaissent.

24. $(*)$ Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction th.

25. $(*)$ Justifier que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble qu'on déterminera.

26. Montrer que la bijection réciproque de la fonction th, notée th^{-1}, vérifie :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad \mathrm{th}^{-1}(x) \ = \ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

27. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de th^{-1}.

Partie B : Fonction sigmoïde

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre **fixé**. On définit la fonction f_λ par :

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\lambda x}}$$

28. Déterminer le domaine de dérivabilité de f_λ et calculer sa dérivée.

29. En déduire le sens de variation de f_λ et calculer les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$ (on distinguera trois cas).

30. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \mathrm{th}\left(\frac{\lambda x}{2}\right)$$

Partie C : Équation différentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle une équation faisant intervenir une fonction et ses dérivées et dont les éventuelles solutions sont des **fonctions**. Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle d'inconnue f avec une condition initiale :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f' & = & \lambda f\,(1-f) \\ f(0) & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \qquad (E)$$

On admettra qu'une solution de cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

31. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)} - 1$.
Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} g' + \lambda\, g = 0 \\ g(0) = 1 \end{array}\right. \qquad (E')$$

32. Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si g est la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$$

On pourra étudier la fonction $h : x \mapsto e^{\lambda\, x}\, g(x)$.

33. À l'aide de la partie précédente, résoudre complètement l'équation (E).

Les fonctions sigmoïdes modélisent l'évolution du pH en fonction de la quantité de solution introduite dans le mélange lors d'un titrage acido-basique.