DS1

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 6. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son sinus.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante :
$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant \sin(x)$.

Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 > \sin(x_0)$.

Démontrons que la proposition ***1.*** est fausse.
On note : $x_0 = 2$. Alors :

- d'une part, par propriété de la fonction sin : $\sin(x_0) \leqslant 1$.
- d'autre part : $x_0 > 1$

Ainsi : $x_0 > 1 \geqslant \sin(x_0)$.

La proposition ***1.*** est donc fausse.

Commentaire

On démontre ici que la négation de la proposition ***1.*** est vraie. Cette négation est une proposition quantifiée existentiellement. Il faut donc exhiber un réel x_0 vérifiant $\big(x_0 > \sin(x_0)\big)$ pour conclure quant à sa véracité.

□

2. $(*)$ Tout réel de carré strictement supérieur à 9, est lui-même de valeur absolue supérieure ou égale à 3.

Démonstration.

Cette proposition s'écrit de la façon suivante :
$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 > 9) \ \Rightarrow\ \big(|x| \geqslant 3\big)$.

Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ (x_0^2 > 9)$ `ET` $\big(|x_0| < 3\big)$.

Démontrons que la propriété ***2.*** est vraie.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Supposons : $x^2 > 9$.
Par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{9}$. D'où :

$$|x| \ \geqslant\ 3$$

La proposition ***2.*** est donc vraie.

□

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante :}\\ \exists (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\ (z_1 \neq z_2) \ \texttt{ET} \ (z_1^2 - 3z_1 + 3 = 0) \ \texttt{ET} \ (z_2^2 - 3z_2 + 3 = 0).\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Sa négation est : } \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\ (z_1 = z_2) \ \texttt{OU} \ (z_1^2 - 3z_1 + 3 \neq 0) \ \texttt{OU} \ (z_2^2 - 3z_2 + 3 \neq 0).}$$

Démontrons que la proposition ***3.*** est fausse.
On note Δ le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 3$. Alors :

$$\Delta \ = \ (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \ = \ 9 - 12 \ < \ 0$$

Le polynôme P n'admet donc aucune racine réelle. En particulier, le trinôme $z^2 - 3z + 3$ n'admet pas deux racines distinctes.

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{3.}} \text{ est donc fausse.}}$$

□

4. La composée de deux fonctions paires est paire.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante :}\\ \forall (f, g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2,\ \Big(\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\big) \ \texttt{ET} \ \big(\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x)\big)\Big) \ \Rightarrow \ \big(\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(-x) = (g \circ f)(x)\big).\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sa négation est :}\\ \exists (f_0, g_0) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2, \big(\forall x \in \mathbb{R}, f_0(-x) = f_0(x)\big) \ \texttt{ET} \ \big(\forall x \in \mathbb{R}, g_0(-x) = g_0(x)\big) \ \texttt{ET} \ \big(\exists x_0 \in \mathbb{R}, (g_0 \circ f_0)(-x_0) \neq (g_0 \circ f_0)(x_0)\big)\end{array}}$$

Démontrons que la proposition ***4.*** est vraie.
Soit $(f, g) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$.
Supposons que f et g sont paires. Démontrons que $g \circ f$ est paire.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} (g \circ f)(-x) & = & g\big(f(-x)\big) & \\ & = & g\big(f(x)\big) & \textit{(car } f \textit{ est paire)} \\ & = & (g \circ f)(x) & \end{array}$$

Ainsi, la fonction $g \circ f$ est paire.

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{4.}} \text{ est donc vraie.}}$$

Commentaire

Notons que, pour que la composée $g \circ f$ soit paire, il suffit que la fonction f soit paire. En effet, dans la démonstration ci-dessus, la parité de g n'est pas utile. On a donc l'implication suivante :

$$f \text{ paire} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ paire}$$

□

Exercice 2

Déterminer, pour chacune des assertions suivantes, si elle est vraie ou fausse. Justifier toutes vos réponses.

1. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $m \leqslant x^2 \leqslant M$

Démonstration.
On cherche à démontrer que cette proposition est fausse. Pour cela, on va démontrer que la négation de ***1.*** est vraie. La proposition ***1.*** s'écrit également :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (m \leqslant x^2) \ \texttt{ ET } \ (x^2 \leqslant M)$$

On cherche donc à démontrer :

$$\forall (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ (m > x_0^2) \ \texttt{ OU } \ (x_0^2 > M)$$

Soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$.
On note : $x_0 = \sqrt{|M+1|}$. Alors :

$$x_0^2 \ = \ \left(\sqrt{|M+1|}\right)^2 \ = \ |M+1|$$

Or : $M < M + 1$. D'où, par transitivité :

$$M \ < \ M+1 \ \leqslant \ |M+1|$$

Ainsi : $M < x_0^2$. On a donc bien démontré :

$$(m > x_0^2) \ \texttt{ OU } \ (x_0^2 > M)$$

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{1.}} \text{ est donc fausse.}}$$

□

2. $(*)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x > 2) \Rightarrow (x \geqslant 3)$

Démonstration.
On cherche à démontrer que cette proposition est fausse. Pour cela, on va démontrer que la négation de ***2.*** est vraie. On cherche donc à démontrer :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R},\ (x_0 > 2) \ \texttt{ ET } \ (x_0 < 3)$$

On note : $x_0 = \dfrac{5}{2}$. Alors :
× d'une part : $x_0 > 2$.
× d'autre part : $x_0 < 3$.
Ainsi : $(x_0 > 2)$ `ET` $(x_0 < 3)$

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{2.}} \text{ est donc fausse.}}$$

□

3. $\exists ! x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0$

Démonstration.
On cherche à démontrer que cette proposition est fausse. Pour cela, on va démontrer que la négation de ***3.*** est vraie. On cherche donc à démontrer :

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \neq 0\big) \ \texttt{ OU } \ \Big(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 \neq x_2) \ \texttt{ ET } \ \big(\cos(x_1) = 0\big) \ \texttt{ ET } \ \big(\cos(x_2) = 0\big)\Big)$$

On note : $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$. On obtient :
× $x_1 \neq x_2$
× $\cos(x_1) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
× $\cos(x_2) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
On a donc démontré :

$$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 \neq x_2) \ \texttt{ET} \ \big(\cos(x_1) = 0\big) \ \texttt{ET} \ \big(\cos(x_2) = 0\big)$$

$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{3.}} \text{ est donc fausse.}}$

Commentaire

On prendra garde à la négation de la proposition $\big(\exists ! x \in E,\ p(x)\big)$. En effet, il faut nier à la fois l'existence (symbole $\exists$) et l'unicite (symbole !). Ainsi, dire qu'il n'existe pas un unique $x \in E$ tel que px est vérifiée, c'est dire :
× soit qu'aucun élément $x \in E$ ne vérifie $p(x)$:

$$\forall x \in E,\ \texttt{NON}(p(x))$$

× soit qu'il existe au moins 2 éléments distincts qui vérifient $p(x)$:

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2, (x_1 \neq x_2) \ \texttt{ET} \ p(x_1) \ \texttt{ET} \ p(x_2)$$

On en déduit que la négation de $\big(\exists ! x \in E,\ px\big)$ est :

$$\Big(\forall x \in E,\ \texttt{NON}(p(x))\Big) \ \texttt{OU} \ \Big(\exists (x_1, x_2) \in E^2, (x_1 \neq x_2) \ \texttt{ET} \ p(x_1) \ \texttt{ET} \ p(x_2)\Big)$$

□

4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Trois cas se présentent :

- s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 3k$, alors :

$$n^3 - n \ = \ (3k)^3 - 3k \ = \ 3^3\, k^3 - 3k \ = \ 3 \times (3^2\, k^3 - k)$$

Or : $3^2\, k^3 - k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $n^3 - n$ est divisible par 3.

- s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 3k + 1$, alors :

$$n^3 - n \ = \ (3k+1)^3 - (3k+1) \ = \ 3^3\, k^3 + 3^2\, k^2 + \cancel{3k + 1} - \cancel{(3k+1)} \ = \ 3 \times (3^2\, k^3 + 3\, k^2)$$

Or : $3^2\, k^3 + 3\, k^2 \in \mathbb{N}$. Ainsi, $n^3 - n$ est divisible par 3.

- s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 3k + 2$, alors :

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (3k+2)^3 - (3k+2) \\ &= 3^3\, k^3 + 3^2\, k^2 \times 2 + 3k \times 2^2 + 2^3 - (3k+2) \\ &= 3^3\, k^3 + 3 \times 6\, k^2 + 3^2\, k + 6 \\ &= 3 \times (3^2\, k^3 + 6\, k^2 + 3\, k + 2) \end{aligned}$$

Or : $3^2\, k^3 + 6\, k^2 + 3\, k + 2 \in \mathbb{N}$. Ainsi, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Finalement, dans tous les cas, l'entier $n^3 - n$ est divisible par 3.

$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{4.}} \text{ est donc vraie.}}$

□

Exercice 3

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. Paramètre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Propositions : $P(f)$: $\big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)\big)$ et $Q(f)$: $\big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\big)$.

Démonstration.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Démontrons : $P(f) \Rightarrow Q(f)$.
  Supposons : $P(f)$, *i.e.* :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)$$
  Démontrons : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique $P(f)$ avec $y = 1 \in \mathbb{R}$. On obtient :
  $$f(x) \ = \ f(1)$$
  On note alors : $\lambda = f(1)$. On a démontré :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda$$
  D'où : $Q(f)$.
  $$\boxed{\text{La proposition } Q(f) \text{ est donc une condition nécessaire à } P(f).}$$
- Démontrons : $Q(f) \Rightarrow P(f)$.
  Supposons : $Q(f)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda$.
  Démontrons : $P(f)$.
  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après $Q(f)$:
  × d'une part : $f(x) = \lambda$,
  × d'autre part : $f(y) = \lambda$.
  Ainsi : $f(x) = f(y)$.
  D'où : $P(f)$.
  $$\boxed{\text{La proposition } Q(f) \text{ est une condition suffisante à } P(f).}$$
  □

2. $(*)$ Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x)$: $(x^2 + 4x - 5 = 0)$ et $Q(x)$: $(\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 0)$.

Démonstration.

- Déterminons l'ensemble de définition de ces équations.
  × Tout d'abord, l'ensemble de définition $\mathcal{D}_P$ de P est $\mathbb{R}$.
  × Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque :
  $$x^2 + 4x - 5 \ = \ (x-1)\,(x+5)$$
  Ainsi :
  $$x^2 + 4x - 5 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x \leqslant -5) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant 1)$$
  L'ensemble de définition $\mathcal{D}_Q$ de Q est donc : $]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × L'implication $\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ est fausse.
    En effet, en notant : $x_0 = 0$, alors :
    - $x_0 \in \mathcal{D}_P$
    - $x_0 \notin \mathcal{D}_Q$

    $\boxed{\text{La proposition } Q(x) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P(x).}$
  - × Démontrons : $Q(x) \Rightarrow P(x)$.
    Supposons : $Q(x)$, alors :
    $$\begin{cases} x \in \,]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[\\ \sqrt{x^2+4x-5} = 0 \end{cases}$$
    On en déduit, par injectivité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$: $x^2 + 4x - 5 = 0$.
    D'où : $P(x)$.

    $\boxed{\text{La proposition } Q(x) \text{ est donc une condition suffisante à } P(x).}$

Commentaire

La condition portant sur le paramètre x ($x \in \mathbb{R}$) est cruciale pour la réponse à cette question.
En effet :
- nous venons de démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ et $Q(x)$ ne sont pas équivalentes.
- cependant, pour tout $x \in \,]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$, par injectivité de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$:
$$Q(x) \ \Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+4x-5} = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2+4x-5 = 0 \ \Leftrightarrow \ P(x)$$

Ainsi, si l'énoncé avait mis pour condition sur x : $x \in \,]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$, il aurait fallu conclure que la proposition $Q(x)$ était une condition nécessaire et suffisante à $P(x)$. □

3. Paramètre : $n \in \mathbb{Z}$.
Propositions : $P(n)$: (n multiple de 2) et $Q(n)$: (n est multiple de 4 ou de 6).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.
- L'implication $\big(P(n) \ \Rightarrow \ Q(n)\big)$ est fausse.
  En effet, en notant : $n_0 = 2$, alors :
  - × n_0 est un multiple de 2. D'où : $P(n_0)$.
  - × n_0 n'est ni un multiple de 4, ni un multiple de 6. D'où : `NON`$(Q(n_0))$.

  $\boxed{\text{La proposition } Q(n) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P(n).}$
- Démontrons : $Q(n) \ \Rightarrow \ P(n)$.
  Supposons : $Q(n)$. Deux cas se présentent :
  - × si n est un multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 4k$. On en déduit :
    $$n \ = \ 4k \ = \ 2 \times 2k$$
    Or : $2k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, n est un multiple de 2.

× si n n'est pas un multiple de 4, alors, comme $Q(n)$ est vérifiée, on en déduit que n est un multiple de 6. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n = 6k$. Ainsi :

$$n \; = \; 6k \; = \; 2 \times 3k$$

Or : $3k \in \mathbb{Z}$. On en conclut que n est un multiple de 2.

Finalement, dans tous les cas, n est un multiple de 2. D'où : Pn.

$\boxed{\text{La proposition } Q(n) \text{ est donc une condition suffisante à } P(n).}$

□

4. Paramètres : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Propositions : $P\big((u_n), \ell\big)$: $\big((u_n)$ converge vers $\ell\big)$ et $Q\big((u_n), \ell\big)$: $(\forall n \geqslant 3,\ \dfrac{1}{n^2} \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{n})$.

Démonstration.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- L'implication $\Big(P\big((u_n), \ell\big) \;\Rightarrow\; Q\big((u_n), \ell\big)\Big)$ est fausse.
  En effet, on note $\ell_0 = 0$ et (v_n) la suite définie par :

$$\forall n \in [\![3, +\infty[\![, \quad v_n \; = \; \frac{1}{n^3}$$

  Alors :

  × la suite (v_n) converge vers $0 = \ell_0$. D'où : $P\big((v_n), \ell_0\big)$.

  × pour tout $n \geqslant 3$: $|v_n - \ell_0| = \left|\dfrac{1}{n^3} - 0\right| = \dfrac{1}{n^3}$. Donc :

$$|v_n - \ell_0| \; = \; \frac{1}{n^3} \; < \; \frac{1}{n^2}$$

  D'où : $\mathtt{NON}(Q\big((v_n), \ell_0\big))$.

$\boxed{\text{La proposition } Q\big((u_n), \ell\big) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P\big((u_n), \ell\big).}$

- Démontrons : $Q\big((u_n), \ell\big) \;\Rightarrow\; P\big((u_n), \ell\big)$.
  Supposons : $Q\big((u_n), \ell\big)$. Alors :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \frac{1}{n^2} \; \leqslant \; |u_n - \ell| \; \leqslant \; \frac{1}{n}$$

  Or :

  × d'une part : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,

  × d'autre part : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

  Par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$. Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
  D'où : $P\big((u_n), \ell\big)$.

$\boxed{\text{La proposition } Q\big((u_n), \ell\big) \text{ est donc une condition suffisante à } P\big((u_n), \ell\big).}$

□

Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sqrt{x\,(x-3)} = \sqrt{3x-5}$

2. $(*)$ $\big(\ln(x)\big)^2 = -2 - 3\,\ln(x)$

3. $(*)$ $2x - 7 \leqslant \sqrt{4x-11}$

4. $|x-1| > |x^2-2|$

Démonstration.

1. Résolvons l'équation ***(1)***.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(1)}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \text{L'équation } \textit{(1)} \text{ est bien définie} & \Leftrightarrow & (x\,(x-3) \geqslant 0) \ \texttt{ET} \ (3x-5 \geqslant 0) \\ & \Leftrightarrow & (x\,(x-3) \geqslant 0) \ \texttt{ET} \ \left(x \geqslant \dfrac{5}{3}\right) \end{array}$$

On a de plus le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x\,(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \text{L'équation } \textit{(1)} \text{ est bien définie} & \Leftrightarrow & \big((x \leqslant 0) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant 3)\big) \ \texttt{ET} \ \left(x \geqslant \dfrac{5}{3}\right) \\ & \Leftrightarrow & x \geqslant 3 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{D}_{(1)} = [3, +\infty[.}$$

- Soit $x \in [3, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x\,(x-3)} = \sqrt{3x-5} & \Leftrightarrow & x\,(x-3) = 3x-5 & \textit{(par injectivité de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 3x = 3x - 5 & \\ & \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 5 = 0 & \\ & \Leftrightarrow & (x-1)\,(x-5) = 0 & \\ & \Leftrightarrow & (x = 1) \ \texttt{OU} \ (x = 5) & \\ & \Leftrightarrow & x = 5 & \textit{(car : } x \geqslant 3\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } \textit{(1)} \text{ est : } \{5\}.}$$

2. Résolvons l'équation *(2)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(2)}$.
  La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\big(\ln(x)\big)^2 = -2 - 3\ln(x) \Leftrightarrow t^2 = -2 - 3t$$

(avec le changement de variable $\boxed{t = \ln(x)}$*)*

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (t+1)(t+2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (t = -1) \ \texttt{OU} \ (t = -2) \\
&\Leftrightarrow \big(\ln(x) = -1\big) \ \texttt{OU} \ \big(\ln(x) = -2\big) \\
&\Leftrightarrow (x = \mathrm{e}^{-1}) \ \texttt{OU} \ (x = \mathrm{e}^{-2})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } \textit{(2)} \text{ est donc : } \{\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-2}\}.}$$

3. Résolvons l'inéquation *(3)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(3)}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c}\text{L'inéquation } \textit{(3)} \\ \text{est bien définie}\end{array} \Leftrightarrow 4x - 11 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{11}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{D}_{(4)} = \left[\frac{11}{4}, +\infty\right[.}$$

- Soit $x \in \left[\frac{11}{4}, +\infty\right[$. Deux cas se présentent :

× si $x < \frac{7}{2}$, alors :

$$2x - 7 < 0 \quad \texttt{ET} \quad \sqrt{4x - 11} \geqslant 0$$

Ainsi, par transitivité :

$$2x - 7 < 0 \leqslant \sqrt{4x - 11}$$

$$\boxed{\text{L'inégalité } \textit{(3)} \text{ est donc vérifiée sur tout l'ensemble } \left[\frac{11}{4}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, \frac{7}{2}\right[= \left[\frac{11}{4}, \frac{7}{2}\right[.}$$

× si $x \geqslant \frac{7}{2}$, alors :

$$2x - 7 \leqslant \sqrt{4x - 11} \Leftrightarrow (2x - 7)^2 \leqslant 4x - 11$$

(par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 49 \leqslant 4x - 11 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 - 32x + 60 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 \leqslant 0
\end{aligned}$$

On note Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 8X + 15$. Alors :

$$\Delta \;=\; (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15 \;=\; 64 - 60 \;=\; 4$$

Le polynôme P admet donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 \;=\; \frac{8 - \sqrt{\Delta}}{2} \;=\; \frac{8-2}{2} \;=\; \frac{6}{2} \;=\; 3$$

$$x_2 \;=\; \frac{8 + \sqrt{\Delta}}{2} \;=\; \frac{8+2}{2} \;=\; \frac{10}{2} \;=\; 5$$

On en déduit :

$$2x - 7 \leqslant \sqrt{4x - 11} \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 15 \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [3, 5]$$

$$\boxed{\text{L'inégalité } \textit{(3)} \text{ est donc vérifiée sur } \left[\frac{11}{4}, +\infty\right[\;\cap\; \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[\;\cap\; [3, 5] \;=\; \left[\frac{7}{2}, 5\right].}$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions de } \textit{(3)} \text{ est : } \left[\frac{11}{4}, \frac{7}{2}\right[\;\cup\; \left[\frac{7}{2}, 5\right] \;=\; \left[\frac{11}{4}, 5\right].}$$

Commentaire

On rappelle : $u = v \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad u^2 = v^2$.
En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| = |v| \;\Leftrightarrow\; u^2 = v^2)}$$

C'est pourquoi on procède par disjonction de cas pour résoudre cette inéquation, en fonction du signe des quantités que l'on considère (ici $(2x - 7)$).

4. Résolvons l'inéquation *(4)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(4)}$.

$$\boxed{\mathcal{D}_{(4)} = \mathbb{R}}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons un tableau de signe pour savoir quelle est la disjonction de cas adaptée à la résolution de l'inéquation :

$$|x - 1| \;>\; |x^2 - 2|$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Quatre cas se présentent alors :

× si $x \in]-\infty, -\sqrt{2}]$, alors :

$$x - 1 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 2 \geqslant 0$$

Ainsi :

$$|x-1| > |x^2-2| \quad \Leftrightarrow \quad -(x-1) > x^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > x^2 + x - 3$$

On note Δ le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 + X - 3$. Alors :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$$

Le polynôme P admet donc exactement deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} = -\frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |x-1| > |x^2-2[\quad & \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right[\\ & \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{2}\right] \qquad \textit{(car : } x \leqslant -\sqrt{2}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, tous les réels de l'intervalle } \left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{2}\right] \text{ sont solutions de l'inéquation } \textit{(4)}.}$$

× si $x \in]-\sqrt{2}, 1]$, alors :

$$x - 1 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 2 \leqslant 0$$

Ainsi :

$$|x-1| > |x^2-2| \quad \Leftrightarrow \quad -(x-1) > -(x^2-2) \quad \Leftrightarrow \quad -x+1 > -x^2+2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 > 0$$

On note Δ le discriminant du polynôme Q défini par : $Q(X) = X^2 - X - 1$. Alors :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

Le polynôme Q admet donc exactement deux racines réelles :

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |x-1| > |x^2-2[\quad & \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[\\ & \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\qquad \textit{(car : } -\sqrt{2} < x \leqslant 1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, tous les réels de l'intervalle } \left]-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\text{ sont solutions de l'inéquation } \textit{(4)}.}$$

× si $x \in \left]1, \sqrt{2}\right]$, alors :

$$x-1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2-2 \leqslant 0$$

Ainsi :

$$|x-1| > |x^2-2| \quad \Leftrightarrow \quad x-1 > -(x^2-2) \quad \Leftrightarrow \quad x-1 > -x^2+2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-3 > 0$$

D'après l'étude du polynôme P effectuée plus haut :

$$\begin{aligned} |x-1| > |x^2-2[\quad &\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty, -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right[\ \cup \ \left]-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[\\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \sqrt{2}\right] \qquad \textit{(car : } 1 < x \leqslant \sqrt{2}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, tous les réels de l'intervalle } \left]-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \sqrt{2}\right] \text{ sont solutions de l'inéquation } \textit{(4)}.}$$

× si $x \in \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$, alors :

$$x-1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2-2 \geqslant 0$$

Ainsi :

$$|x-1| > |x^2-2| \quad \Leftrightarrow \quad x-1 > x^2-2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > x^2-x-1$$

D'après l'étude du polynôme Q effectuée plus haut :

$$\begin{aligned} |x-1| > |x^2-2[\quad &\Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left]\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\qquad \textit{(car : } \sqrt{2} < x\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, tous les réels de l'intervalle } \left]\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\text{ sont solutions de l'inéquation } \textit{(4)}.}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de *(4)* est :

$$\left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{2}\right] \cup \left]-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \sqrt{2}\right] \cup \left]\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions de } \textit{(4)} \text{ est : } \left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[}$$ □

Exercice 5

On note (u_n) la suite de Fibonacci. Elle est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. $(*)$ Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence double : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geqslant n - 1$.

- **Initialisation** :
  - Tout d'abord :
    × d'une part, d'après l'énoncé : $u_2 = u_1 + u_0 = 1$,
    × d'autre part : $2 - 1 = 1$.
    Ainsi : $u_2 \geqslant 2 - 1$. D'où : $\mathscr{P}(2)$.
  - Ensuite :
    × d'une part, d'après l'énoncé : $u_3 = u_2 + u_1 = 2$,
    × d'autre part : $3 - 1 = 2$.
    Ainsi : $u_3 \geqslant 3 - 1$. D'où : $\mathscr{P}(3)$.
- **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+2)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant (n+2) - 1$).
  Par définition de u_{n+2} :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n & \\ & \geqslant & \big((n+\cancel{1}) - \cancel{1}\big) + (n-1) & \textit{(d'après } \mathscr{P}(n+1) \textit{ et } \mathscr{P}(n)\textit{)} \\ & = & 2n - 1 & \end{array}$$

  Or :

$$\begin{array}{rrcl} & n & \geqslant & 2 \\ \text{donc} & 2n & \geqslant & n+2 \\ \text{d'où} & 2n-1 & \geqslant & n+1 \end{array}$$

  Ainsi, par transitivité : $u_{n+2} \geqslant 2n - 1 \geqslant n + 1$.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \mathscr{P}(n).}$$

Par ailleurs :
- Tout d'abord :
  × d'une part, d'après l'énoncé : $u_0 = 0$,
  × d'autre part : $0 - 1 = -1$.
  Ainsi : $u_0 \geqslant 0 - 1$. D'où : $\mathscr{P}(0)$.
- Ensuite :
  × d'une part, d'après l'énoncé : $u_1 = 1$,
  × d'autre part : $1 - 1 = 0$.
  Ainsi : $u_1 \geqslant 1 - 1$. D'où : $\mathscr{P}(1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n - 1.}$$

□

2. Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{2k} \;=\; u_k\,(u_k + 2\,u_{k-1}) \quad \text{et} \quad u_{2k+1} \;=\; (u_{k+1})^2 + (u_k)^2$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ où $\mathscr{P}(k)$: $\left\{\begin{array}{rcl} u_{2k} & = & u_k\,(u_k + 2\,u_{k-1}) \\ u_{2k+1} & = & (u_{k+1})^2 + (u_k)^2 \end{array}\right.$

- **Initialisation** :
  - Tout d'abord, d'après les calculs effectués en question précédente : $u_2 = 1$. De plus :
    $$u_1\,(u_1 + 2\,u_0) \;=\; 1 \times (1 + 2 \times 0) \;=\; 1$$
    Ainsi : $u_2 = u_1\,(u_1 + 2\,u_0)$.
  - Ensuite, toujours d'après les calculs de la question précédente : $u_3 = 2$. De plus :
    $$(u_2)^2 + (u_1)^2 \;=\; 1^2 + 1^2 \;=\; 2$$
    Ainsi : $u_3 = (u_2)^2 + (u_1)^2$.

  D'où : $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathscr{P}(k)$ et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{rcl} u_{2(k+1)} & = & u_{k+1}\,(u_{k+1} + 2\,u_k) \\ u_{2(k+1)+1} & = & (u_{k+2})^2 + (u_{k+1})^2 \end{array}\right.$)
  - Tout d'abord :
    $$\begin{array}{rcll} u_{2(k+1)} & = & u_{2k+2} & \\ & = & u_{2k+1} + u_{2k} & \textit{(par définition de } u_{2k+3}\textit{)} \\ & = & (u_{k+1})^2 + (u_k)^2 + u_k\,(u_k + 2\,u_{k-1}) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (u_{k+1})^2 + u_k\,\big(u_k + (u_k + 2\,u_{k-1})\big) & \\ & = & (u_{k+1})^2 + u_k(2\,u_k + 2\,u_{k-1}) & \\ & = & (u_{k+1})^2 + 2\,u_k\,(u_k + u_{k-1}) & \\ & = & (u_{k+1})^2 + 2\,u_k\,u_{k+1} & \textit{(par définition de } u_{k+1}\textit{)} \\ & = & u_{k+1}\,(u_{k+1} + 2\,u_k) & \end{array}$$
  - De plus :
    $$\begin{array}{rcll} u_{2(k+1)+1} & = & u_{2k+3} & \\ & = & u_{2k+2} + u_{2k+1} & \textit{(par définition de } u_{2k+3}\textit{)} \\ & = & u_{k+1}\,(u_{k+1} + 2\,u_k) + (u_{k+1})^2 + (u_k)^2 & \begin{array}{l}\textit{(par hypothèse de récurrence} \\ \textit{et d'après le point précédent)}\end{array} \\ & = & (u_{k+1})^2 + 2\,u_{k+1}\,u_k + (u_k)^2 + (u_{k+1})^2 & \\ & = & (u_{k+1} + u_k)^2 + (u_{k+1})^2 & \\ & = & (u_{k+2})^2 + (u_{k+1})^2 & \textit{(par définition de } u_{k+2}\textit{)} \end{array}$$

  D'où : $\mathscr{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\{\begin{array}{rcl} u_{2k} & = & u_k\,(u_k + 2\,u_{k-1}) \\ u_{2k+1} & = & (u_{k+1})^2 + (u_k)^2 \end{array}\right. .}$$

□

3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1})^2 - u_n\, u_{n+2} = (-1)^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ (u_{n+1})^2 - u_n\, u_{n+2} = (-1)^n$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $(u_1)^2 - u_0 \times u_2 \ = \ 1^2 - 0 \times 1 \ = \ 1$.
  - D'autre part : $(-1)^0 = 1$.

  Ainsi : $(u_1)^2 - u_0\, u_2 = (-1)^0$. D'où : $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $(u_{n+2})^2 - u_{n+1}\, u_{n+3} = (-1)^{n+1}$).

$$\begin{aligned}
(u_{n+2})^2 - u_{n+1}\, u_{n+3} &= (u_{n+1} + u_n)^2 - u_{n+1}\,(u_{n+2} + u_{n+1}) && \textit{(par définition de } u_{n+2} \textit{ et } u_{n+3}\textit{)}\\
&= \cancel{(u_{n+1})^2} + 2\, u_n\, u_{n+1} + (u_n)^2 - u_{n+1}\, u_{n+2} - \cancel{(u_{n+1})^2}\\
&= 2\, u_n\, u_{n+1} + (u_n)^2 - u_{n+1}\,(u_{n+1} + u_n) && \textit{(par définition de } u_{n+2}\textit{)}\\
&= 2\, u_n\, u_{n+1} + (u_n)^2 - (u_{n+1})^2 - u_n\, u_{n+1}\\
&= u_n\,(u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1})^2\\
&= u_n\, u_{n+2} - (u_{n+1})^2 && \textit{(par définition de } u_{n+2}\textit{)}\\
&= -\big((u_{n+1})^2 - u_n\, u_{n+2}\big)\\
&= -(-1)^n && \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

  D'où : $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1})^2 - u_n\, u_{n+2} = (-1)^n.}$$ □

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $\sum\limits_{k=0}^{0} u_{2k} = u_{2\times 0} = u_0 = 0$.
  - D'autre part : $u_{2\times 0+1} - 1 = u_1 - 1 = 1 - 1 = 0$.

  Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{0} u_{2k} = u_{2\times 0+1} - 1$. D'où : $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{k=0}^{n+1} u_{2k} = u_{2(n+1)+1} - 1$).

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} u_{2k} &= \sum_{k=0}^{n} u_{2k} + u_{2(n+1)}\\
&= u_{2n+1} - 1 + u_{2n+2} && \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= u_{2n+3} - 1 && \textit{(par définition de } u_{2n+3}\textit{)}
\end{aligned}$$

  D'où : $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1.}$$ □

5. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} = u_{2n}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} = u_{2n}$.

- ▶ **Initialisation** :
  - D'une part : $\sum_{k=0}^{0-1} u_{2k+1} = \sum_{k\in\varnothing} u_{2k+1} = 0$.
  - D'autre part : $u_{2\times 0} = u_0 = 0$.

  Ainsi : $\sum_{k=0}^{0-1} u_{2k+1} = u_{2\times 0}$. D'où : $\mathscr{P}(0)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2(n+1)}$).

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} + u_{2n+1} \\ &= u_{2n} + u_{2n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{2n+2} && \textit{(par définition de } u_{2n+2}\textit{)} \end{aligned}$$

  D'où : $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} = u_{2n}.}$$

□

6. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.

- ▶ **Initialisation** :
  - D'une part : $\sum_{k=1}^{0} u_k = \sum_{k\in\varnothing} u_k = 0$.
  - D'autre part : $u_{0+2} - 1 = u_2 - 1 = 1 - 1 = 0$.

  Ainsi : $\sum_{k=1}^{0} u_k = u_{0+2} - 1$. D'où : $\mathscr{P}(0)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = u_{n+3} - 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} u_k &= \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} \\ &= u_{n+2} - 1 + u_{n+1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+3} - 1 && \textit{(par définition de } u_{n+3}\textit{)} \end{aligned}$$

  D'où : $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1.}$$

□

7. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

- **Initialisation** :
  - Tout d'abord :
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0-k}{k} \ = \ \binom{0}{0} \ = \ 1 \ = \ u_1$$
    D'où $\mathscr{P}(0)$.
  - Ensuite :
$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1-k}{k} \ = \ \binom{1}{0} + \cancel{\binom{0}{1}} \ = \ 1 \ = \ u_2$$
    D'où $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. Démontrons $\mathscr{P}(n+2)$ (*i.e.* $u_{n+3} = \sum\limits_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k}$).

$$\begin{array}{rcll}
u_{n+3} & = & u_{n+2} + u_{n+1} & \textit{(par définition de } u_{n+3}\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} & \textit{(d'après } \mathscr{P}(n+1) \textit{ et } \mathscr{P}(n)\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\left(\binom{n+1-0}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \right) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} & \\
 & = & \displaystyle 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
 & = & \displaystyle 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n-k}{k+1} + \binom{n-k}{k} \right) & \\
 & = & \displaystyle 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-k}{k+1} & \textit{(par triangle de Pascal)} \\
 & = & \displaystyle 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} & \textit{(par décalage d'indice)}
\end{array}$$

Par ailleurs :
$$\sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} \ = \ \binom{n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} + \cancel{\binom{0}{n+2}} \ = \ 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} \ = \ u_{n+3}$$
D'où $\mathscr{P}(n+2)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence double : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.}$$

□

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ (f \circ f)(n) < f(n+1)$.

1. Démontrer : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ (k \geqslant n) \Rightarrow \big(f(k) \geqslant n\big)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N},\ (k \geqslant n) \Rightarrow \big(f(k) \geqslant n\big)$.

- **Initialisation** : soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons : $k \geqslant 0$. Alors, comme f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'après l'énoncé : $f(k) \in \mathbb{N}$.
En particulier : $f(k) \geqslant 0$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall k \in \mathbb{N},\ (k \geqslant n+1) \Rightarrow \big(f(k) \geqslant n+1\big)$).
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons : $k \geqslant n+1$.
  - Par hypothèse sur la fonction f :
$$\underset{\substack{\shortparallel \\ f\left(f(k-1)\right)}}{(f \circ f)(k-1)} \quad < \quad f(k)$$
  - Comme $k \geqslant n+1$, alors : $k-1 \geqslant n$. Ainsi, par hypothèse de récurrence :
$$f(k-1) \ \geqslant \ n$$
On note : $k_0 = f(k-1)$. On vient de démontrer : $k_0 \geqslant n$.
Ainsi, toujours par hypothèse de récurrence : $f(k_0) \geqslant n$. Autrement dit :
$$f\big(f(k-1)\big) \ \geqslant \ n$$
  - On en déduit, par transitivité :
$$f(k) \ > \ f\big(f(k-1)\big) \ \geqslant \ n$$
D'où : $f(k) > n$.
  - Or $f(k)$ et n sont des entiers. On en déduit :
$$f(k) \ \geqslant \ n+1$$
D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ (k \geqslant n) \Rightarrow \big(f(k) \geqslant n\big).}$$
□

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \geqslant n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On remarque : $n \geqslant n$. On peut donc appliquer ***1.*** à $k = n$. On obtient :
$$f(n) \ \geqslant \ n$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n}$$
□

3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction f prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
  Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition revient donc à démontrer que la suite $\big(f(n)\big)$ est strictement croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons : $f(n+1) > f(n)$.
  - × Par définition de f :
    $$\begin{array}{ccc} f(n+1) & > & (f \circ f)(n) \\ & & \shortparallel \\ & & f\big(f(n)\big) \end{array}$$
  - × Or, d'après la question précédente appliquée à $f(n)$ (ce qui est licite car $f(n) \in \mathbb{N}$) :
    $$f\big(f(n)\big) \ \geqslant \ f(n)$$
  - × Ainsi, par transitivité :
    $$f(n+1) \ > \ f\big(f(n)\big) \ \geqslant \ f(n)$$

  D'où : $f(n+1) > f(n)$.

  On en déduit que la suite $\big(f(n)\big)$ est strictement croissante.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur son ensemble de définition.}}$$

□

4. En conclure : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On procède par double inégalité.

- D'après *2.* : $f(n) \geqslant n$.
- Il reste à démontrer : $f(n) \leqslant n$.
  On procède par l'absurde.
  Supposons : $f(n) > n$.
  Comme $f(n) \in \mathbb{N}$ et $n+1 \in \mathbb{N}$, on obtient : $f(n) \geqslant n+1$.
  Par croissance de f sur son ensemble de définition (d'après *3.*) :
  $$f\big(f(n)\big) \ \geqslant \ f(n+1)$$
  De plus, par définition de f :
  $$f(n+1) \ > \ f\big(f(n)\big)$$
  Ainsi, par transitivité :
  $$f(n+1) \ > \ f\big(f(n)\big) \ \geqslant \ f(n+1)$$
  Absurde ! On en conclut : $f(n) \leqslant n$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n.}$$

□