DS1

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 6. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son sinus.

2. $(*)$ Tout réel de carré strictement supérieur à 9, est lui-même de valeur absolue supérieure ou égale à 3.

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

4. La composée de deux fonctions paires est paire.

Exercice 2

Déterminer, pour chacune des assertions suivantes, si elle est vraie ou fausse. Justifier toutes vos réponses.

1. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $m \leqslant x^2 \leqslant M$

2. $(*)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x > 2) \Rightarrow (x \geqslant 3)$

3. $\exists ! x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0$

4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 3

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. Paramètre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Propositions : $P(f) : \big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)\big)$ et $Q(f) : \big(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\big)$.

2. $(*)$ Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x) : (x^2 + 4x - 5 = 0)$ et $Q(x) : (\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 0)$.

3. Paramètre : $n \in \mathbb{Z}$.
Propositions : $P(n) : (n$ multiple de 2$)$ et $Q(n) : (n$ est multiple de 4 ou de 6$)$.

4. Paramètres : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P\big((u_n), \ell\big) : \big((u_n)$ converge vers $\ell\big)$ et $Q\big((u_n), \ell\big) : \left(\forall n \geqslant 3,\ \dfrac{1}{n^2} \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sqrt{x\,(x-3)} = \sqrt{3x-5}$

2. $(*)$ $\big(\ln(x)\big)^2 = -2 - 3\,\ln(x)$

3. $(*)$ $2x - 7 \leqslant \sqrt{4x-11}$

4. $|x-1| > |x^2-2|$

Exercice 5

On note (u_n) la suite de Fibonacci. Elle est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

1. $(*)$ Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 1$.

2. Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{2k} \;=\; u_k\,(u_k + 2\,u_{k-1}) \quad \text{et} \quad u_{2k+1} \;=\; (u_{k+1})^2 + (u_k)^2$$

3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1})^2 - u_n\,u_{n+2} = (-1)^n$.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$.

5. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_{2k+1} = u_{2n}$.

6. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.

7. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n-k}{k}$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f \circ f)(n) < f(n+1)$.

1. Démontrer : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $(k \geqslant n) \Rightarrow \big(f(k) \geqslant n\big)$.

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \geqslant n$.

3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante.

4. En conclure : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.