

Thème 3 : Analyse

I. Préliminaires

- Rappelons tout d'abord qu'on appelle **proposition mathématique** un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).

Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

a) $1 + 1 = 2$

b) $1 + 1 = 3$

c) $\ln(1) = 1$

Cette proposition est vraie. Cette proposition est fausse. Cette proposition est fausse.

Par contre, $1 + 1 - 2$ et $(\sqrt{18})^3$ ne sont pas des propositions puisqu'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Ce sont des expressions arithmétiques dont le résultat est un réel.

- Il est à noter qu'une proposition mathématique peut comporter des variables. En conséquence, il est possible que la valeur de vérité d'une proposition dépende du choix de ces variables.

a) $x + 2 \geq 4$

× cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 2,

× cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 2.

b) $\sqrt{x^2} = x$

× cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 0,

× cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 0.

c) Par contre, $10^x - (\sqrt{y})$ n'est pas une proposition. C'est une expression arithmétique dont le résultat est un réel.

- La valeur de vérité d'une proposition ne dépend pas toujours des variables qu'elle contient. Dans une proposition mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur. Ainsi, dans les propositions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$$

la variable n est muette. Cela signifie qu'on peut renommer la variable n sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(m) \qquad \exists k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$$

ont même sens que les propositions précédentes.

Par contre, si on considère seulement la proposition $\mathcal{P}(n)$ (sans faire apparaître de quantificateur devant), on obtient un objet mathématique qui dépend de ce n particulier.

- Il existe d'autres constructions mathématiques pour lesquelles les variables sont muettes.

Par exemple, dans les écritures :

$$\int_0^1 \ln(x+1) dx \qquad \sum_{i=0}^5 2^i$$

on peut renommer la variable x et la variable i en écrivant :

$$\int_0^1 \ln(t+1) dt \qquad \sum_{j=0}^5 2^j$$

sans que cela ne change les valeurs calculées. Les deux variables sont ici liées par un symbole mathématique qui n'est pas un quantificateur mais qui permet quand même d'introduire la variable et son ensemble d'appartenance (x parcourt $[0, 1]$ et i parcourt $\llbracket 0, 5 \rrbracket$).

Commentaire

- Profitons des définitions précédentes pour rappeler qu'un quantificateur permet notamment d'introduire une variable et son ensemble d'appartenance. Une variable n'a pas d'existence propre tant qu'elle n'a pas été introduite. Ainsi, une écriture de la forme : « $\ln(x) \leq x - 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ », n'a AUCUN sens mathématique. En effet, la première partie de la proposition se réfère à une variable x qui n'est introduite qu'après coup. La bonne écriture est évidemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$$

- On rappelle aussi que lorsqu'on est en présence de quantificateurs de natures différentes, l'ordre est important. Par exemple, si on dispose d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les propositions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

n'ont pas du tout le même sens. La seconde signifie que la fonction f est bornée (on est capable de trouver un réel M qui majore TOUTES les valeurs de $f(x)$ i.e. un majorant de $f(x)$ avec x qui parcourt \mathbb{R} en entier). La première proposition signifie que pour chaque valeur particulière de x , on est capable de trouver un réel M (qui peut dépendre de x !) tel que, pour cette valeur particulière de x on ait : $f(x) \leq M$. Toute fonction satisfait cette proposition car, on peut poser, pour chaque choix de x : $M = f(x)$. On obtient bien alors : $f(x) \leq M$.

Exercice 1. Rayer la ou les mentions inutiles

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : libre / liée
2. Dans l'écriture $(\{X = i\})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, la variable i est : libre / liée
et la variable n est : libre / liée
3. Le résultat de la quantité $\sum_{i=1}^k i$ dépend de : i / k / ni i ni k
4. Une variable muette est : libre / liée
5. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),
la quantité $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: dépend de n /
ne dépend pas de n /
peut dépendre de n
6. Dans l'écriture $\int_0^x f(t) dt$, la variable t est : libre / liée
la variable x est : libre / liée
7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée
la variable z est : libre / liée
8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$,
la variable x est : libre / liée
la variable y est : libre / liée

9. Une variable libre

doit toujours / être introduite
 : ne doit jamais / par un « Soit »
 doit parfois

10. Une variable liée

doit toujours / être introduite
 : ne doit jamais / par un « Soit »
 doit parfois

Exercice 2

a) Pour chacune des expressions suivantes :

- (i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
- (ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\int_2^3 f(t) dt,$ | 9. $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x - y),$ | 20. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n,$ |
| 2. $\int_0^x f(t) dt,$ | 10. $f : t \mapsto e^{-t},$ | 21. $\forall y \in]0, +\infty[, \exists x \in \mathbb{R}, y = e^x$ |
| 3. $\int_0^x t e^t dt,$ | 11. $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t},$ | 22. $\exists k \in \mathbb{Z}, k \leq \pi < k + 1,$ |
| 4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ | 12. $f(x),$ | 23. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leq x < k + 1,$ |
| 5. $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt,$ | 13. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$ | 24. $u_n,$ |
| 6. $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt,$ | 14. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\},$ | 25. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}},$ |
| 7. $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt,$ | 15. $[1, B],$ | 26. $\sum_{n \geq 3} u_n,$ |
| 8. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x},$ | 16. $\sum_{i=0}^n i^3,$ | 27. $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n,$ |
| | 17. $\sum_{i=j}^n i^3,$ | 28. $u_n \geq \ln(2),$ |
| | 18. $\sum_{i=j}^n (i+j)^3,$ | 29. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \ln(2)$ |
| | 19. $\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n (i+j)^3,$ | 30. $\mathcal{P}(n),$ |
| | | 31. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n).$ |

b) Calculer la somme $\sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k 2^i 3^j.$

De quelles variables dépend l'expression obtenue ? Était-ce prévisible ?

II. Séance 1 : déterminer la régularité d'une fonction

- Il faut savoir démontrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe \mathcal{C}^1 , de classe \mathcal{C}^2 , ..., de classe \mathcal{C}^∞ sur un ensemble E . La manière de procéder est toujours la même.

La fonction f est [type de régularité] sur E car elle est (au choix) :

1) la somme $f = f_1 + f_2$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_2 est [type de régularité] sur E .

2) le produit $f = f_1 \times f_2$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_2 est [type de régularité] sur E .

3) l'inverse $f = \frac{1}{f_1}$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_1 ne s'annule pas sur E .

4) le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :

× f_1 est [type de régularité] sur E .

× f_2 :

– est [type de régularité] sur E .

– ne s'annule pas sur E .

5) la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

× f_1 est :

– [type de régularité] sur E .

– telle que $f_1(E) \subset F$

× f_2 est [type de régularité] sur F .

où l'on remplace chaque occurrence de [type de régularité] par continue, ou dérivable ou de classe \mathcal{C}^1 ou de classe \mathcal{C}^2 , ..., ou de classe \mathcal{C}^∞ .

- Pour démontrer qu'une fonction f est [type de régularité] sur E , il s'agit donc de montrer que des sous-fonctions f_1 et f_2 sont [type de régularité] sur E .

Pour démontrer que f_1 et f_2 sont [type de régularité] sur E , on peut avoir à les décomposer elles-mêmes à l'aide de sous-fonctions et ainsi de suite.

Ce type de démonstration nécessite des fonctions particulières dont on sait qu'elles sont [type de régularité] sur E . Ces briques de base sont :

× les fonctions polynomiales qui sont [type de régularité] sur n'importe quel ensemble E .

× les fonctions usuelles (\ln , \exp , $\sqrt{\cdot}$, $(\cdot)^n$, $(\cdot)^\alpha$, ...) dont on connaît la régularité.

- Il n'y a aucune difficulté à démontrer qu'une fonction est [type de régularité] sur E .

Il suffit d'appliquer la méthode ! De ce fait, les erreurs d'application de la méthode seront lourdement sanctionnées.

- Lorsqu'on étudie la régularité d'une fonction définie par cas (comme la fonction $|\cdot|$ par exemple), on est amené à étudier la régularité de la fonction sur chacun des ensembles ouverts (ici $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$) et enfin à étudier la régularité en les points restants (ici 0) en étudiant la régularité à gauche et à droite de ces points.

- Une fonction (définie en x_0) est continue en un point x_0 si elle admet une limite **finie** en ce point. On rappelle que la notion de limite est une notion locale : on s'intéresse au comportement de la fonction au voisinage du point x_0 c'est à dire dans un intervalle ouvert contenant x_0 (par exemple de type $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ où $\delta > 0$). Plusieurs cas se présentent alors :

× si la fonction est définie par cas.

Une fonction est dite définie par cas si elle est définie sur une réunion d'intervalles réels et la restriction à chacun de ces intervalles est donnée par une expression différente.

Les deux fonctions suivantes sont par exemple définies par cas :

$$\begin{array}{l} |\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad \begin{array}{l} f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Si une fonction f est définie par cas au voisinage de x_0 , alors on calcule la limite à droite de x_0 , la limite à gauche de x_0 et on vérifie si ces valeurs sont égales à $f(x_0)$.

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto |x|$ et $x_0 = 0$.

La fonction f est bien définie à gauche et à droite de 0 (sur $] -1, 1[$ par exemple).

De plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ et enfin $f(0) = |0| = 0$.

La fonction f est bien continue en 0.

× si la fonction n'est pas définie par cas.

Une fonction n'est pas définie par cas si son expression est la même sur l'ensemble de son intervalle de définition. C'est le cas par exemple des deux fonctions suivantes :

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x^3-x} \end{array} \qquad \begin{array}{l} g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x(1-x)} \end{array}$$

Si une fonction f n'est pas définie par cas au voisinage de x_0 , un seul calcul de limite est suffisant.

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^3-x}$ et $x_0 = 0$.

La fonction f est bien définie de la même manière à gauche et à droite de 0 (sur $] -1, 1[$ par exemple). Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1$.

La fonction f est bien continue en 0.

× si la fonction f n'est définie qu'à droite (resp. gauche) de x_0 , on s'intéresse seulement au comportement à droite (resp. gauche) de x_0 .

Exemple : on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$.

La fonction f est bien définie à droite de 0 (sur $[0, 1[$ par exemple).

De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

La fonction f est bien continue en 0.

Dans le cas où f n'est pas définie au point x_0 , on peut prolonger f par continuité au point x_0 si f admet une limite finie en x_0 .

- On retiendra du point précédent que pour déterminer la régularité d'une fonction f , on s'intéresse au comportement de f à proximité du point x_0 . La donnée de f seulement au point x_0 n'est pas suffisante. En conséquence, l'horreur :

~~$$f \text{ constante en } x_0 \Rightarrow f \text{ dérivable en } x_0$$~~

vaudra des points négatifs si rencontrée dans une copie. Au passage, la formulation « f constante en le point x_0 » est hasardeuse. Une fonction f définie en x_0 ne prend évidemment qu'une valeur en x_0 (par définition d'une fonction).

- Si une fonction est dérivable sur E alors elle est continue sur E . L'horreur :

$$\del{f \text{ continue sur } E \Rightarrow f \text{ dérivable sur } E}$$

vaudra des points négatifs si rencontrée. Au passage, rien ne sert de parler de « fonction continue, dérivable sur E ». On parlera simplement de « fonction dérivable sur E » (la continuité s'en déduit).

- Une fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur E si elle dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe \mathcal{C}^0 sur E . De manière générale, une fonction est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur E (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si elle dérivable et que sa **dérivée** f' est de classe \mathcal{C}^n sur E .

Exercice 3

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble E .

Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité au bord de l'ensemble E ?

a) $f : x \mapsto x \ln(x) - x$ et $E =]0, +\infty[$

b) $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$ et $E =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

c) $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)+1}$ et $E =]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$

d) $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{3x + 5}$ et $E =]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$

e) $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ et $E =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$

f) $f : x \mapsto e^{x^3-x}$ et $E =]-\infty, +\infty[$

g) $f : x \mapsto \ln(1 + |x|)$ et $E =]-\infty, +\infty[$

2. Les fonctions précédentes sont-elles dérivables sur E ?

Sont-elles dérivables au bord de E ?

3. Les fonctions précédentes sont-elles \mathcal{C}^1 sur E ? Sont-elles \mathcal{C}^2 sur E ?

Sont-elles \mathcal{C}^∞ sur E ?

Exercice 4

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{\ln(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[-4, 4]$.

2. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\int_{-4}^4 f(u) du$.

III. Séance 2 : équations différentielles linéaires (EDL)

Commentaire

On commence par rappeler la méthode de résolution des EDL.

- 1) Résolution de l'équation homogène associée. On note \mathcal{S}_H l'ensemble de ses solutions.
- 2) Recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On note cette fonction g .
Pour cette étape, on pourra :
 - a) vérifier rapidement si certaines fonctions constantes sont solution.
 - b) chercher cette solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale **si le 2nd membre est polynomial**,
 - c) appliquer la méthode de variation de la constante **dans le cas d'une EDL d'ordre 1**.
- 3) Obtention des solutions de l'EDL complète :

$$\mathcal{S} = \{f + g \mid f \in \mathcal{S}_H\}$$

III.1. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 5

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(E_1) y' - 5y = 2$
2. $(E_2) y' - 5y = x^2$
3. $(E_3) y' - 5y = 5x^2 - 14$
4. $(E_4) y' - 3y = e^{-3x} + 6$
5. $(E_5) y' - 2y = \frac{1}{(e^{-2t} + 3)^2}$
6. $(E_6) y' + y = t^k e^{-t}$

III.2. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 6

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(E_1) y'' - 3\sqrt{2}y' + 4y = 8$
2. $(E_2) y'' + 6y' + 9y = 7$
3. $(E_3) y'' - y = 3x^2$
4. $(E_4) 2y'' - 3y' + y = x e^{-x}$
5. $(E_5) 2y'' - 3y' + y = x e^x$
6. $(E_6) y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$
7. $(E_7) y'' + y' + y = \sin(2x)$

IV. Séance 3 : notion de produit scalaire**Exercice 7**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. On pose, pour $(f, g) \in E \times E$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) t^2 dt$.

Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

V. Séance 4 : méthodes de calcul d'intégrales

V.1. Intégrales à vue

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 a) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x}} dx & c) \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx & e) \int_1^e \frac{(\ln(x))^2}{x} dx & g) \int_e^2 \frac{\ln(x)}{x} dx \\
 b) \int_1^{1/\ln 2} 2^x dx & d) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2 + 1} dx & f) \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx &
 \end{array}$$

V.2. Décomposition en éléments simples

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 a) \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt & b) \int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)} dt & c) \int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}
 \end{array}$$

V.3. Intégration par parties

Exercice 10

Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 a) I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx & b) I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx & c) I = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx
 \end{array}$$

V.4. Changements de variable

Exercice 11

On note $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$.

1. a) À l'aide du changement de variable $u = e^x$ démontrer que : $I = \int_1^e \frac{1}{u+1} \frac{1}{u} du$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$$

pour tout $u \notin \{-1, 0\}$.

c) En déduire la valeur de I .

2. Procéder de même pour calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

On pourra poser le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$.

VI. Séance 5 : calcul d'intégrales définies par une relation de récurrence

Exercice 12

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

1. Calculer I_0, I_1 .
2. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
3. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $I_{n+1} - I_n$ sous forme d'une intégrale.
 b) En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 c) En déduire enfin que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

5. En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 13

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit pour tout entier naturel n , l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$.

1. Démontrer que I_0 est une intégrale convergente et déterminer sa valeur.
2. Démontrer que I_1 est une intégrale convergente et déterminer sa valeur.
On pourra penser à une intégration par parties.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale I_n .
Question a priori réservée aux cubes.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, aI_n = nI_{n-1}$.
5. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

VII. Séance 6 : intégrale fonction de ses bornes

Exercice 14

On considère la fonction $G : x \mapsto \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de G .
2. Montrer que pour tout $t \geq 0$: $t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$.
3. En déduire un encadrement de $G(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.
4. Montrer alors : $G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3}x^3$.
5. Démontrer que G réalise une bijection de \mathbb{R}^+ vers un intervalle à préciser.

Exercice 15

On considère la fonction $H : x \mapsto \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de H .
2. Démontrer que la fonction H est impaire.
3. Démontrer que la fonction H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
En déduire les variations de H .
4. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]$: $\exp(-4x^2) \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-x^2)$.
b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \exp(-4x^2) \leq H(x) \leq x \exp(-x^2)$.
c) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

Exercice 16

On considère la fonction : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

1. Démontrer que F est définie sur \mathbb{R} .
Justifier que F est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer sa dérivée.
2. Montrer que F est impaire.
3. Déterminer la monotonie de F .
4. Montrer : $\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1$.
5. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$.
Dans la suite, on note $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
6. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.
a) Justifier que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer G' . Que dire de G ?
b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

VIII. Séance 7 : séries numériques

Exercice 17

Déterminer (en la justifiant) la nature des séries suivantes.

$$1. \sum \frac{n}{2^n}$$

$$3. \sum \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$5. \sum \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$$

$$2. \sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$$

$$4. \sum e^{-n}$$

$$6. \sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$$

MÉTHODO

Étude des séries numériques (PCSI)

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) Étude de la suite (u_n) réelle ou complexe

a) Si $u_n \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

b) Si $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.

(une étude plus précise doit être réalisée)

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

2) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (c'est-à-dire si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$)

On dispose des quatre outils suivants.

a) Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.

b) Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.

c) Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.

d) Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée. Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence. On pensera notamment :

× à comparer avec des séries de terme général $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ dont la nature est donnée par le critère de Riemann.

(on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)

× à utiliser la formule de Stirling (cf cours de 2^{ème} année) pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

3) Si $\sum u_n$ est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête (cf cours de 2^{ème} année).

b) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geq 0$, les techniques du 2) sont utilisables)

• Si $\sum |u_n|$ est convergente (c'est-à-dire $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.

• Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente (une étude plus précise doit être réalisée).

IX. Séance 8 : sommes de Riemann

Commentaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)$ (où g est une fonction continue sur $[0, +\infty[$).

- Vouloir exprimer S_n comme une somme de Riemann, c'est chercher à transformer l'expression de S_n pour l'écrire de la façon suivante :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

De manière plus générale, on peut chercher à écrire S_n sous la forme :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

on peut cependant toujours se placer dans le cas précédent où $a = 0$ et $b = 1$.

- Pour effectuer cette transformation, on commence **toujours** par forcer l'apparition du terme $\frac{k}{n}$. On écrira par exemple :

$$\times k = \frac{k}{n} \times n$$

$$\times k^2 = \left(\frac{k}{n} \times n\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times n^2$$

$$\times \ln(k) = \ln\left(\frac{k}{n} \times n\right) = \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \ln(n)$$

Il ne reste ensuite qu'à sortir les termes ne faisant pas intervenir $\frac{k}{n}$ de la somme.

Exercice 18

1. Pour tout entier n non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k}$.

Transformer S_n pour l'exprimer comme une somme de Riemann puis conclure sur la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. En procédant de même, étudier le comportement en $+\infty$ de la suite de terme général :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(k+n) - \ln(n))$$

Exercice 19

On considère de nouveau : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On admet que (cf TP sur les sommes de Riemann) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - S_n \right| \leq \frac{1}{2n}$$

1. Déterminer un entier n_0 tel que : $\left| \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - S_{n_0} \right| \leq 10^{-4}$.
2. Dédire de cette inégalité un programme **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ à 10^{-4} près.
3. Exécuter votre programme sur votre ordinateur. Quelle valeur obtient-on ? Commenter.

Exercice 20

On considère la suite (T_n) de terme général :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n \sqrt{n^2 + k^2}}$$

1. Démontrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer la valeur de sa limite.
2. Écrire en **Python** une fonction `sommeR` qui :
 - × prend en paramètre une variable `n`,
 - × stocke dans une variable de sortie `T` la valeur du terme de rang `n` de la suite (T_n) .

X. Séance 9 : comparaison séries / intégrales

Exercice 21

1. On considère dans la suite une fonction f continue et décroissante sur \mathbb{R} .

a) Montrer que : $\forall k \geq 1, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires.
(cela ne constitue pas une démonstration)

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Faire apparaître sur une nouvelle représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires.
(cela ne constitue pas une démonstration)

c) Démontrer enfin que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(t) dt$$

2. On considère maintenant la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

b) En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

c) En déduire que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

d) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$?

3. On considère maintenant la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ sur $[2, +\infty[$.

a) Soit $n \geq 1$. Calculer $\int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

b) À l'aide de ce qui précède, comparer $\int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ et $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

d) Écrire en **Python** une fonction `sommeSI` qui :

× prend en paramètre une variable **n**,

× stocke dans une variable de sortie **S** la valeur de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.