Thème 4 : Probabilités

I. Mise en jambe : lois discrètes usuelles

Exercice 1
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$.

Déterminer la valeur, si elles existent, des quantités suivantes.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Rappelons qu'on dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ si :

  a) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

  b) $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$

  Dans la suite, notons $p = \frac{1}{4}$.
- Comme X est une v.a.r. finie alors X admet des moments à tous les ordres.
  En particulier, X admet une espérance et une variance.
- Déterminons $\mathbb{E}(X)$. Par définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}(\{X = x\}) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

  Or, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

  (cette relation est vraie pour $k = 0$ si on considère $\binom{n-1}{-1} = 0$)

  Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k\ q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k\ q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} p^{k+1}\ q^{n-(k+1)} && \textit{(par changement d'indice)} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k\ q^{(n-1)-k} \\ &= np\ (p+q)^{n-1} = np && \textit{(car } p+q=1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

- Déterminons maintenant $\mathbb{V}(X)$. D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Or, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \; \mathbb{P}(\{X = x\}) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \; k^2 \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \; k^2 \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k}$$

On écrit alors : $k^2 = k\ (k-1) + k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} k^2 \binom{n}{k} &= (k\ (k-1) + k) \binom{n}{k} \\ &= k\ (k-1) \binom{n}{k} + k \binom{n}{k} \\ &= (k-1)\ k \binom{n}{k} + k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \;+\; \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On reconnaît la partie de droite : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \;=\; \mathbb{E}(X)$.
Il reste à déterminer la partie de gauche.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\ (k-1) \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} && \textit{(par la relation binomiale précédente)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (k-1) \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} && \textit{(en adaptant la relation binomiale)} \\ &= n\ (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} q^{n-(k+2)} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k q^{(n-2)-k} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \end{aligned}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient que : $\mathbb{E}(X^2) = n\ (n-1)\ p^2 + np$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= n(n-1)\ p^2 + np - (np)^2 \\ &= np\ ((n-1)\ p + 1 - np) \\ &= np\ (\cancel{np} - p + 1 - \cancel{np}) \;=\; np\ (1-p) \;=\; npq \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = npq}$$

$$\boxed{\text{Si } X \sim \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{4}\right) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = \frac{n}{4} \;\text{ et }\; \mathbb{V}(X) = n\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}.}$$

Commentaire

- On a refait le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ ici pour rappeler la méthode. Mais il faut connaître la valeur de l'espérance et de la variance des lois classiques. Aux concours, seul le résultat est exigible et il ne faudra donc pas, sauf si c'est explicitement demandé, refaire ces calculs.
- La méthode de calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ se base sur l'écriture sur les éléments $k \in X(\Omega)$:

$$k^2 = k(k-1) + k$$

À l'échelle des variables aléatoires cela correspond à l'écriture :

$$X^2 = X(X-1) + X$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient alors :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$

On retrouve ainsi la partie de gauche et la partie de droite du calcul précédent. □

b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.

Démonstration.
La v.a.r. $X-3$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui admet une variance.

- De plus par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X-3) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(3) \;=\; \mathbb{E}(X) - 3 \;=\; \frac{n}{4} - 3$$

- Et par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X-3) \;=\; \mathbb{V}(X) \;=\; \frac{3n}{16}$$

(on rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X-3) = \frac{n}{4} - 3 \;\text{ et }\; \mathbb{V}(X) = \frac{3n}{16}}$$

□

c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration.
Avec les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X) = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X) = \frac{4n}{16} = \frac{n}{4}}$$

□

d) $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

- On a déjà vu que X, en tant que v.a.r. finie, admet des moments à tous les ordres. En particulier, X^2 admet une espérance.
- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X^2) & = & \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ & = & npq + (np)^2 \\ & = & np(1-p) + n^2p^2 \\ & = & np - np^2 + n^2p^2 \ = \ np + n(n-1)p^2 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = np + n(n-1)p^2 = \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{16} = \frac{n(n+3)}{16}}$$

Commentaire

Il faut retenir cette méthode : lorsqu'on connaît la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (il faut les connaître dans le cas des lois classiques), on obtient immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

□

II. Méthodologie : Calculs de probabilités

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage ...) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  ~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

  (cf démarche de l'exrcice sur la limite monotone)
- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~

  L'événement A est réalisé si et seulement si ... ✓
- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, **c'est que** ...

  Dans ce cas, l'événement B **est réalisé si et seulement si** ...

III. Séance 1 : formule des probabilités composées

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient la boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$B_k \quad : \quad \text{« on obtient une boule bleue au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

$$R_k \quad : \quad \text{« on obtient la boule rouge au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

L'événement $\{N=n\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient n boules, c'est-à-dire $n-1$ boules bleues et 1 boule rouge

$\Leftrightarrow$ Lorsque l'expérience s'arrête on a ajouté $(n-1)-1 = n-2$ boules bleues dans l'urne

$\Leftrightarrow$ On a tiré une boule bleue lors du 1^{er} tirage

`ET` on a tiré une boule bleue lors du $2^{\text{ème}}$ tirage

... ...

`ET` on a tiré une boule bleue lors du $(n-2)^{\text{ème}}$ tirage

`ET` on a tiré la boule rouge lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage

$\Leftrightarrow$ L'événement B_1 est réalisé

`ET` l'événement B_2 est réalisé

... ...

`ET` l'événement B_{n-2} est réalisé

`ET` l'événement R_{n-1} est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$ est réalisé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \{N=n\} \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}}$$

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}\big) \\
= \ & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) \\
= \ & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

× $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-2}}(R_{n-1}) = \dfrac{1}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.

Plus précisément, **si** l'événement $B_1\cap\cdots\cap B_{n-2}$ est réalisé, **c'est que** les $n-2$ permiers tirages ont donné une boule bleue.

Dans ce cas, l'événement R_{n-1} **est réalisé si et seulement** si lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage la boule rouge est tirée dans l'urne contenant n boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{N = n\}\big) \ = \ \frac{1}{(n-1)\,n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \mathbb{P}\big(\{N = n\}\big) \ = \ \frac{1}{n\,(n-1)}}$$

Commentaire

- Cette question est une très bonne illustration de ce qu'on attend dans un exercice de probabilité. Lorqsue la question consiste à déterminer la probabilité d'un événement, fournir la solution directement et sans explication n'apportera aucun point (ou presque). Afin de déterminer la probabilité d'un événement, on commence toujours par le décomposer sous forme d'intersections et / ou de réunions d'événements basiques. Cette première étape est essentielle. Ici, il s'agit d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \{N = n\} \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

  On a ici largement détaillé la méthode permettant d'obtenir la décomposition de l'événement considéré. Un tel niveau de détails n'est pas un attendu des concours mais permet de comprendre comment aboutir au résultat souhaité. Il est conseillé de suivre cette rédaction tant que la décomposition de l'événement considéré n'apparaît pas évidente.

- L'aspect mathématique de la question démarre après cette décomposition d'événements. Comment calcule-t-on la probabilité d'une intersection (respectivement réunion) d'événements ? Le cours nous informe que :

  – la probabilité d'une réunion est la somme des probabilités pourvu que les événements considérés sont deux à deux incompatibles.

    Si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible ou le passage à l'événement contraire ce qui permet de se ramener au calcul de la probabilité d'une intersection d'événements.

  – la probabilité d'une intersection est le produit des probabilités pourvu que les événements considérés sont (mutuellement) indépendants.

    S'il n'y a pas indépendance, on utilise la formule des probabilités composées (c'est le cas ici).

□

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
import random as rd

def simuleN() :
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < ..........
        b = b + 1
    N = ..........
    return N
```

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante.

```
1 def simuleN() :
2     b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
3     while rd.random() < b/(b+1)
4         b = b + 1
5     N = b + 1
6     return N
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simuleN`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,
  × elle renvoie la valeur stockée dans la variable `N`.

```
1 def simuleN() :
```

```
6     return N
```

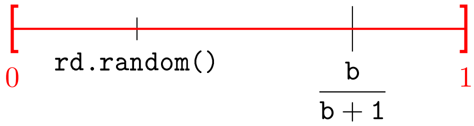
  En ligne 2, la variable `b`, qui contient le nombre de boules bleues dans l'urne à chaque tirage, est initialisée à 1 (initialement l'urne contient une seule boule bleue).

```
2     b = 1
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 3 à 4 consistent, au fur et à mesure des tirages, à mettre à jour la variable `b` (désignant le nombre de boules bleues dans l'urne) jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. Autrement dit, on doit effectuer une mise à jour de `b` tant que l'on pioche une boule bleue.
  Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
3     while rd.random() < b/(b+1)
```

- × Détaillons l'obtention de la ligne 3.
  On utilise ici la commande `rd.random`. Cette instruction renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0,1]$. Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.
- × Cette valeur choisie aléatoirement dans $[0,1]$ permet d'obtenir une simulation d'un tirage dans l'urne.



Deux cas se présentent.

– Si `rd.random()` $< \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$: alors, on considère qu'on a obtenu une boule bleue.
  Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right\}\right) = \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$$

  ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir une boule bleue dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.
  Dans ce cas, on met à jour la variable `b` en l'incrémentant de 1.

```
4        b = b + 1
```

– Si `rd.random()` $\geqslant \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$: alors, on considère qu'on a obtenu la boule rouge.
  Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} \leqslant U \leqslant 1\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} \leqslant U\right\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left\{U < \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right\}\right) = 1 - \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} = \frac{1}{\mathtt{b}+1}$$

  ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir la boule rouge dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.
  Dans ce cas, on ne met pas à jour la variable `b` et on arrête les tirages dans l'urne.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de la boucle while, la variable `b` contient le nombre de boules bleues à la fin de l'expérience. Il faut donc lui ajouter 1 pour obtenir le nombre total de boules dans l'urne à la fin de l'expérience. Il ne reste qu'à stocker cette valeur `b + 1` dans la variable de sortie `N`.

```
6      N = b + 1
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Python**. □

Exercice 3
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

Commentaire

- Formellement, l'événement N_n n'est pas défini dans cet énoncé. Il aurait fallu ajouter :

  on note N_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la boule noire »

- Notons au passage qu'on ne définit pas non plus l'événement B_n : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ». Ce n'est pas primordial ici puisque $B_n = \varnothing$ (comme l'urne ne contient que $n-1$ boules blanches et qu'on procède sans remise, on ne peut piocher une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage).
- On peut enfin remarquer : $N_n \cancel{=} \overline{B_n}$.
  En effet : $\overline{B_n} = \overline{\varnothing} = \Omega$ est toujours réalisé mais N_n n'est réalisé que si on a pioché la boule noire lors du $n^{\text{ème}}$ tirage (et il n'y a pas de raison que ce soit toujours le cas).

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

Démonstration.
Plusieurs cas se présentent :

× si la boule noire est piochée lors du 1^{er} tirage, alors X prend la valeur 1.
× si la boule noire est piochée lors du $2^{\text{ème}}$ tirage, alors X prend la valeur 2.
× ...
× si la boule noire est piochée lors du $n^{\text{ème}}$ tirage, alors X prend la valeur n.

Ainsi, X peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$ □

2. a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier : $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$.

Si l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, **c'est qu**'une boule blanche a été piochée lors des $i-1$ premiers tirages dans l'urne. À l'issue de ces tirages, l'urne est alors constituée de $(n-\cancel{1})-(i-\cancel{1}) = n-i$ boules blanches et de la boule noire (l'urne contient donc $n-i+1$ boules en tout).

Dans ce cas, l'événement B_i **est réalisé si et seulement si** le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule blanche. Autrement dit, si l'on obtient l'une des $n-i$ boules blanches non encore piochées. Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.}$$ □

Commentaire

- Dans cette question, il est demandé de justifier la valeur de la probabilités conditionnelle $\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i)$. Il faut bien comprendre qu'il s'agit ici d'un pur exercice de rédaction. Il faut alors s'en remettre à la méthodologie présente en page 6 de ce document.
- Un mauvais réflexe, lorqsu'on demande le calcul d'une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$ serait d'écrire :
$$\mathbb{P}_B(A) \ = \ \frac{\mathbb{P}\big(B\cap, A\big)}{\mathbb{P}(B)}$$
Cette formule est juste mais n'a d'intérêt ici que s'il est plus simple de déterminer $\mathbb{P}\big(B\cap, A\big)$ que $\mathbb{P}_B(A)$. De manière générale, si le calcul de $\mathbb{P}\big(B\cap, A\big)$ n'a pas été demandé dans une question précédente, la démarche consistant à utiliser la formule ci-dessus est vaine. Comme annoncé dans le point précédent, la détermination d'une probabilité conditionnelle se fait via la rédaction proposée en page 6.
- On utilise la notation $\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i)$ mais la notation $Prob\big(B_i \mid B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}\big)$ peut elle aussi être utilisée. Il faut cependant faire attention avec cette notation qui pourrait tendre à faire croire que l'on détermine la probabilité de « l'événement conditionnel $B_i \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ ». Cela n'a aucun sens car un tel objet (« l'événement conditionnel ») n'existe pas. Il s'agit en réalité de déterminer la probabilité de l'événement B_i dans le contexte où l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé c'est-à-dire de déterminer la probabilité de l'événement B_i pour l'application probabilité $\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}$.
- La mention d'un « événement conditionnel » démontre l'incompréhension des objets manipulés et sera fortement sanctionné dans une copie. Comment éviter de commettre une telle erreur ? Il suffit, une nouvelle fois de se reporter à la méthode de rédaction présente en page 6.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 1$, alors : $\{X = 1\} = N_1$.
(l'événement $\{X = 1\}$ est réalisé si et seulement si on tire la boule noire lors du 1^{er} tirage)
On rappelle que l'urne contient n boules dont 1 noire.

$$\boxed{\text{Chaque boule étant piochée de manière équiprobable : } \mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{n}.}$$

- Si $k \in [\![2, n]\!]$, alors l'événement $\{X = k\}$ est réalisé si et seulement si on a pioché successivement $(k-1)$ boules blanches puis une noire. Ainsi :
$$\{X = k\} \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$$
On en déduit par la formule des probabilités composées :
$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \ \times \ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \ \times \ \mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) \ \times \cdots \times \ \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \ \times \ \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \\ = & \dfrac{n-1}{n} \ \times \ \dfrac{n-2}{n-1} \ \times \ \dfrac{n-3}{n-2} \ \times \cdots \times \ \dfrac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \ \times \ \dfrac{1}{n-k+1} \end{array}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\overline{N_1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$.

× $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.

Plus précisément, **si** l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, **c'est que** les $k-1$ premiers tirages ont donné une boule blanche.

Dans ce cas, l'événement N_k **est réalisé si et seulement si** lors du $k^{\text{ème}}$ tirage la boule noire est tirée dans l'urne contenant $n-k+1$ boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \;=\; \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \;=\; \frac{1}{n}.}$$

□

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

  × $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

  × $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \;=\; \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!]).}$$

- On en déduit que X admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}.}$$

□

IV. Séance 2 : formule des probabilités totales

Commentaire

- Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans le schéma décrit dans la partie II. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B = \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$

C'est cette écriture qui permet de conclure : $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}\big(A_i \cap B\big)$.

- Il est inutile, lorsqu'on utilise la formule des probabilités totales, de la démontrer. Autrement dit, l'étape de décomposition d'événement ($B = \bigcup\limits_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$) n'a pas à être rappelée. Il est en revanche essentiel de préciser que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme un système complet d'événements pour pouvoir affirmer : $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}\big(A_i \cap B\big)$.

Exercice 4

1. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Déterminer $\mathbb{P}(\{X = 1\})$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $\{X = 1\} = P_1$.
(l'événement $\{X = 1\}$ est réalisé si et seulement si on obtient Pile lors du 1^{er} tirage)
- La famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) &= \mathbb{P}(P_1) \\
&= \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap P_1)} + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1) && \textit{(car } A_1 \cap P_1 = \varnothing \textit{ puisque la pièce 1 ne donne que Face)} \\
&= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(P_1) && \textit{(car pour tout } i \in [\![0,2]\!], \ \mathbb{P}(A_i) = \tfrac{1}{3} \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 \ = \ \frac{1}{2} && \textit{(par définition des pièces 0 et 2)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

- Il faut faire particulièrement attention aux objets utilisés dans cette question :
  - × X est une variable aléatoire,
  - × A_i (pour $i \in [\![0, 2]\!]$) est un événement.

  Comme X est une variable aléatoire, $\{X = 1\}$ est un événement et les objets $\{X = 1\}$ et A_i se situent eux au même niveau.
- Cette question est une illustration du cadre classique de la formule des probabilités totales : l'expérience aléatoire débute par un choix (en l'occurrence le choix de la pièce qui sera utilisée) et ce choix influence le reste de l'expérience aléatoire (l'obtention de Pile lors de premier tirage dépend fortement de la pièce avec laquelle on joue).
- La première étape de l'expérience consiste à choisir l'une des 3 pièces :
  - × si la pièce 0 est choisie alors A_0 est réalisé.
  - × si la pièce 1 est choisie alors A_1 est réalisé.
  - × si la pièce 2 est choisie alors A_2 est réalisé.

  Chacun de ces choix excluant les autres, les événements A_0, A_1 et A_2 sont 2 à 2 incompatibles.
  Comme il n'existe pas d'autre choix possible (la liste précédente est exhaustive), alors :
  $$\bigcup_{i=0}^{2} A_i = \Omega$$
  Ces deux points démontrent que la famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.
- On demande alors de déterminer la probabilité de l'événement P_1 (réalisé si et seulement Pile est obtenu lors du premier lancer). Le réflexe initial est de se dire que l'on sait parfaitement déterminer cette valeur pour peu que l'on connaisse la pièce avec laquelle les tirages sont effectués. Autrement dit, on demande $\mathbb{P}(P_1)$ et on a plutôt accès à $\mathbb{P}_{A_0}(P_1)$, $\mathbb{P}_{A_1}(P_1)$, $\mathbb{P}_{A_2}(P_1)$.
  Il s'agit donc de tester la réalisation de l'événement P_1 par rapport à la réalisation de chacun des événements A_0, A_1 et A_2. Cela se fait formellement avec la formule des probabilités totales.
  Comme la famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements :
  $$\mathbb{P}(P_1) \ = \ \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(P_1) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(P_1)$$
- Dans la question, on fournit d'abord la formule sous la forme :
  $$\mathbb{P}(P_1) \ = \ \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap P_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1)$$
  Retenir la formule sous cette forme a deux avantages :
  - × il existe des exercices où on détermine initialement les probabilités d'intersection d'événements $(Prob\big(A_i \cap P_1\big))$ plutôt que les probabilités conditionnelles $(\mathbb{P}_{A_i}(P_1))$. On en reparlera au moment du chapitre sur les couples de variables aléatoires (mais on peut déjà se référer à la question suivante).
  - × la formule utilisant les probabilités conditionnelles se déduit naturellement de cette formule. □

2. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X - Y = 0\})$

Commentaire

Remarquons qu'on se ramène ici à un cas particulier de loi d'une somme $X - Y$. Il faut donc se préparer à utiliser les méthodes usuelles pour la détermination de ce type de loi : la formule des probabilités totales.

- La famille $(\ \{X = k\}\ )_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{X - Y = 0\}) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X - Y = 0\}) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) \times \mathbb{P}(\{Y = k\}) & \textit{(car X et Y sont indépendantes)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2 & \textit{(car X et Y ont même loi)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{X = Y\}) = \sum_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2.}$$

□

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\,\mathbb{P}(\{Y \geqslant n\})$.

Démonstration.
La famille $(\{X = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{X \leqslant Y\}) & \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{n \leqslant Y\}) & \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\ \mathbb{P}(\{n \leqslant Y\}) & \textit{(car les v.a.r. X et Y sont indépendantes)}
\end{array}$$

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes, car les lancers du joueur A et ceux du joueur B sont indépendants.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\ \mathbb{P}(\{Y \geqslant n\}).}$$

□

Exercice 5
Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.
On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. De plus :

× la probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$.

× la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

On considère l'événement E : « l'objet provient de la chaîne A ».

On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que cet objet provienne de la chaîne A ?

Démonstration.

- Définition des événements
  Notons D l'événement : « l'objet est défectueux ».
  Ainsi $\overline{D}$ est l'événement : « l'objet a été correctement monté ».

- Récupération des données de l'énoncé
  D'après l'énoncé :

  × $\mathbb{P}(E) = 0,6$ et donc $\mathbb{P}(\overline{E}) = 0,4$,

  × $\mathbb{P}_E(D) = 0,1$ et donc $\mathbb{P}_E\left(\overline{D}\right) = 0,9$,

  × $\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) = 0,2$ et donc $\mathbb{P}_{\overline{E}}\left(\overline{D}\right) = 0,8$.

- Déterminons la probabilité que l'objet soit défectueux.
  La famille $(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcccc}
\mathbb{P}(D) & = & \mathbb{P}(E \cap D) & + & \mathbb{P}(\overline{E} \cap D) \\
& = & \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(D) & + & \mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(D) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(E) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(\overline{E}) \neq 0\textit{)} \\
& = & 0,6 \times 0,1 & + & 0,4 \times 0,2 \\
& = & \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{10} & + & \dfrac{4}{10} \times \dfrac{2}{10} \quad = \quad \dfrac{14}{100}
\end{array}$$

- L'objet de la question est de déterminer $\mathbb{P}_D(E)$ (bien défini car $\mathbb{P}(D) \neq 0$).
  D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_D(E) = \frac{\mathbb{P}(E)\ \mathbb{P}_E(D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{6}{10}\ \frac{1}{10}}{\frac{14}{100}} = \frac{6}{\cancel{100}}\ \frac{\cancel{100}}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un objet provienne de la chaîne } A \text{ sachant qu'il est défectueux est } \frac{3}{7}.}$$

□

V. Séance 3 : variables discrètes

Commentaire

Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega = \{P, F\}^3$.
Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit $Face$, le $2^{\text{ème}}$ fournit $Face$, le $3^{\text{ème}}$ fournit $Pile$.

2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir $Pile$ au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

$$P_1 = \{ (P, F, F), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P) \}$$

Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :

- elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a.r. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
  Cela démontre que la v.a.r. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).
- elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $\{X = 2\}$ est un événement.
  Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
  Autrement dit : $\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{ (P, P, F), (P, F, P), (F, F, P) \}$.

Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

Exercice 6

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1 - p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite).
- La v.a.r. Y_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \sim \mathcal{B}(n, p).}$$

□

2. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 10 issues numérotées de 1 à 10.
- La v.a.r. Z prend pour valeur le numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 10 \rrbracket).}$$

□

Commentaire

- Lorsqu'une v.a.r. suit une loi usuelle, il est impératif de respecter la rédaction suivante :
  1) description de l'expérience,
  2) description de la v.a.r. aléatoire.
  On s'attachera toujours à bien détailler ces deux points.
- L'étape de description de l'expérience ne consiste en aucun cas à recopier l'énoncé (« l'expérience consiste à effectuer des tirages dans une urne ») mais à démontrer que l'expérience décrite dans l'énoncé est une illustration d'une expérience usuelle (« l'expérience consiste en la **succession de ... épreuves de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre** »). Il s'agit de généraliser et en aucun cas de particulariser.