DS8

Exercice I

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \ = \ (1 - X - X^2)\ P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandée** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) si ce n'est pas fait dans l'énoncé (et si la notation P_i n'est pas utilisée par ailleurs).

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{array}{rl} & \Big(f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\ = & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)''(X) \\ = & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P'' + \mu \cdot Q'')(X) \\ = & \lambda \cdot (1 - X - X^2)\ P'(X) \ + \ \mu \cdot (1 - X - X^2)\ Q'(X) \\ & + \ \lambda \cdot \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X) \ + \ \mu \cdot \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X) \\ = & \lambda \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ P'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\ \Big) \\ & + \ \mu \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ Q'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X)\ \Big) \\ = & \lambda \cdot \Big(f(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(f(Q)\Big)(X) \ = \ \Big(\lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q)\Big)(X) \end{array}$$

  (par linéarité des applications dérivée première et seconde)

  L'application f est donc linéaire.

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

  – Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :

    × $\deg(P') \leqslant 1$ donc $\deg\big((1 - X - X^2)\ P'\big) \leqslant 3$.

    × $\deg\left(\dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''\right) \leqslant 3$.

    On en déduit : $\deg\left((1 - X - X^2)\ P'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\right) \leqslant 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \ \leqslant \ \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $f(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

– Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de f :

$$f(R + a_2 \cdot P_2) \ = \ f(R) + a_2 \cdot f(P_2)$$

En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(f(R)\big) \leqslant 2$.
Il reste alors à déterminer $\deg\big(f(P_2)\big)$. Or :

$$\begin{aligned}\big(f(P_2)\big)(X) \ &= \ (1 - X - X^2) \ P_2'(X) + \frac{1}{2} (-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \ P_2''(X) \\ &= \ 2X \ (1 - X - X^2) + \cancel{2} \ \frac{1}{\cancel{2}} (-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \\ &= \ 2X - 2X^2 - \cancel{2X^3} - 1 - X + 3X^2 + \cancel{2X^3} \ = \ -1 + X + X^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\deg\big(f(P_2)\big) = 2$ et d'après ce qui précède : $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

☐

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

Démonstration.

- $$\begin{aligned}\big(f(P_0)\big)(X) \ &= \ (1 - X - X^2) \ P_0'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \ P_0''(X) \\ &= \ 0 \qquad \textit{(car } P_0'(X) = 0 \textit{ et } P_0''(X) = 0\textit{)}\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_0) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\big(f(P_1)\big)(X) \ &= \ (1 - X - X^2) \ P_1'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \ P_1''(X) \\ &= \ 1 - X - X^2 \qquad \textit{(car } P_1'(X) = 1 \textit{ et } P_1''(X) = 0\textit{)}\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_1) = 1 \cdot P_0 - 1 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}\big(f(P_2)\big)(X) \ &= \ (1 - X - X^2) \ P_2'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \ P_2''(X) \\ &= \ -1 + X + X^2 \qquad \textit{(le calcul a déjà été effectué au-dessus)}\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_2)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } A = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

☐

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} A \times A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(f\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(f\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) & \textit{(par définition de } A\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(f \circ f\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) & \\ & \Leftrightarrow & f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot) \textit{ est un isomorphisme)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

□

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ est non inversible car elle possède une colonne constituée uniquement de 0.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } f \text{ n'est pas bijective.}}$$

□

5. ***a)*** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

  Notons alors $U = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \Longleftrightarrow & A\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & a_1 & - & a_2 & = & 0 \\ & - & a_1 & + & a_2 & = & 0 \\ & - & a_1 & + & a_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1 & - & a_2 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \{\ a_1 = a_2 \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_1 = a_2\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot (P_1 + P_2) \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2) \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)}_{E_0(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_0(A)}$$

- La famille $\mathcal{H}_1 = \big(P_0, P_1 + P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement de deux polynômes non proportionnels.

  On en déduit que $\mathcal{H}_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{H}_1\big) = 2}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2)) \\ & = & \mathrm{Vect}\,\big(0_{\mathbb{R}_2[X]},\ P_0 - P_1 - P_2,\ -P_0 + P_1 + P_2\big) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(P_0 - P_1 - P_2) \end{array}$$

  La famille $\mathcal{H}_2 = \big(P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un polynôme non nul.

  On en déduit que $\mathcal{H}_2$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{H}_2\big) = 1}$$

Commentaire

La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ peut aussi être obtenue à l'aide du théorème du rang.
Plus précisément :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\dim(E)} \ = \ \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)} \ + \ \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3 - 2 = 1$.

□

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  × $f\big(f(P_1)\big) = (f \circ f)(P_1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***2***.
  × $f(P_0) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***3***.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \big(f(P_1), P_0\big) \text{ est une famille d'éléments de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- De plus : $f(P_1) = P_0 - P_1 - P_2$.
  La famille $\mathcal{F} = \big(P_0, P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  × libre car constituée uniquement de deux polynômes non proportionnels,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot f(P_1) + \lambda_3 \cdot P_0 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. $(*)$

$$\begin{array}{lcrcl}
\text{Or :} \quad (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot \big(f(P_1)\big)(X) + \lambda_3 \cdot P_0(X) & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot X + \lambda_2 \cdot (1 - X - X^2) + \lambda_3 \cdot 1 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot X - \lambda_2 \cdot X^2 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]}
\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
 & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
 & & & & \lambda_3 & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \big(P_1, f(P_1), P_0\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{G}$ est :
  × libre.
  × telle que : $\mathrm{Card}\big(\mathcal{G}\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{G} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

□

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Démonstration.

- $f(P_1) = 0 \cdot P_1 + 1 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f\big(f(P_1)\big) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\Big(f\big(f(P_1)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(P_0) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Il s'agit de démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E$, $(f \circ f)(x) = 0_E$.

Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) & \\ & = & 0_E & \textit{(car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow \ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

Cette question est plus théorique que celles de la première Partie. Dans la deuxième partie, l'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.

- Supposons : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Il s'agit de démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} f(y) & = & f(f(x)) & \\ & = & (f \circ f)(x) \ = \ 0_E & \textit{(car } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
  On en conclut : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow \ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$$

□

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

1 `Soit` $y \in \mathrm{Im}(f)$.
2 `Il existe donc` $x \in E$ `tel que :` $y = f(x)$. `Alors :`
3 $f(y) = \ldots$
4 $\quad = \ldots$
5 $\quad = 0_E$
6 `Ainsi,` $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.
  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.
  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. a) Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Comme $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors, d'après la question précédente : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big).}$$ □

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

Démonstration.
Notons $m = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & m \end{array}$$

  Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m$.

- D'après la question précédente : $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = m \leqslant 3 - m = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$. Or :

$$m \leqslant 3 - m \quad \Leftrightarrow \quad 2m \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad m \leqslant \frac{3}{2}$$

  Ainsi, seuls deux cas se présentent :
  - si $m = 0$
    Remarquons :
    × $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 3 = \dim(E)$,
    × $\mathrm{Ker}(f) \subset E$.
    On en déduit : $\mathrm{Ker}(f) = E$. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ f(x) = 0_E$$

    C'est impossible car on a supposé dans l'énoncé : $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - si $m = 1$ alors $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 2$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2 \text{ et } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1.}$$

$\square$

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  × $f\big(f(u)\big) = (f \circ f)(u) = 0_E$ car $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  × $f(v) = 0_E$ car $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (f(u), v) \text{ est une famille d'éléments de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- Démontrons que la famille $(f(u), v)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose : $\lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot v = 0_E$. $(*)$
  Deux cas se présentent alors :
  × si $\lambda_2 \neq 0$ alors :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f(u) = f\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot u\right)$$

  On en conclut $v \in \mathrm{Im}(f)$.
  C'est impossible car on suppose dans l'énoncé : $v \notin \mathrm{Im}(f)$.
  × si $\lambda_2 = 0$ alors l'égalité $(*)$ se réécrit enfin :

$$\lambda_2 \cdot f(u) = 0_E$$

  Et comme $f(u) \neq 0_E$ alors $\lambda_2 = 0$. Ainsi, on a bien démontré :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(f(u), v\big)$ est :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(f(u), v\big) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

$\square$

b) Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $(u, f(u), v)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$. $(*)$

$$\begin{array}{lrcll} \text{On a alors} & f\big(\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v\big) & = & f\big(0_E\big) & \textit{(en appliquant } f\textit{)} \\ \text{donc} & \lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot f\big(f(u)\big) + \lambda_3 \cdot f(v) & = & 0_E & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ \text{et} & \lambda_1 \cdot f(u) & = & 0_E & \textit{(car } f\big(f(u)\big) = 0_E \textit{ et } f(v) = 0_E\textit{)} \\ \text{ainsi} & \lambda_1 & = & 0 & \textit{(car } f(u) \neq 0_E \textit{ puisque } u \notin \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

- L'égalité $(*)$ se réécrit alors :
$$\lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$$
  Or, la famille $\big(f(u), v\big)$ est libre car c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit : $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Finalement, on a démontré :
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
$$\boxed{\text{La famille } \big(u, f(u), v\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(u, f(u), v\big)$ est :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(u, f(u), v\big) \text{ est une base de } E.}$$

□

c) Déterminer la matrice de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Démonstration.

- $f(u) = 0 \cdot u + 1 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f\big(f(u)\big) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\Big(f\big(f(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(v) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Commentaire

La matrice obtenue dans cette question est la même que celle obtenue en ***6.b)***. C'est logique : la **Partie I** de cet exercice n'est qu'une illustration du résultat plus général démontré dans la **Partie II**. C'est une construction classique aux concours : avant d'aborder le résultat dans toute sa généralité, on laisse le candidat se familiariser en lui proposant de travailler sur un exemple simple.

Exercice II

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

10. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \begin{cases} x_n \text{ est défini} \\ x_n > 0 \end{cases}$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $x_0 > 0$
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \begin{cases} x_{n+1} \text{ est défini} \\ x_{n+1} > 0 \end{cases} \right)$.
  - Par hypothèse de récurrence, $x_n > 0$. Ainsi : $x_n \neq 0$ et la quantité $\dfrac{1}{x_n}$ est bien définie.
    Il en est de même de $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
  - On en déduit enfin :
    $$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > 0$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence, } (x_n) \text{ est bien définie et à termes strictement positifs.}}$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathscr{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

11. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de (x_n) :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0 \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (x_n) \text{ est (strictement) croissante.}}$

□

12. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la suite (x_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :
  - × si (x_n) est majorée, alors elle converge.
  - × si (x_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons par l'absurde que (x_n) n'est pas majorée.
  Supposons que la suite (x_n) est majorée.
  Alors elle converge vers un réel ℓ.
  - Tout d'abord, d'après ***1.*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$.
    Par passage à la limite : $\ell \geqslant 0$.

Commentaire

- On rappelle que, par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent **larges**.
  Plus précisément :
  $$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > a \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \ell \geqslant a$$
- On pourra retenir l'exemple classique de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$:
  - × d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} > 0$
  - × d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \cancel{>} 0$

- Deux cas se présentent alors :
  - × si $\ell > 0$. Par définition de (x_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
    Or, par continuité de la fonction inverse en $\ell \in \,]0, +\infty[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\ell}$.
    $$\begin{array}{lll} \text{On en déduit} & \ell = \ell + \dfrac{1}{\ell} & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{\ell} = 0 & \\ \text{ainsi} & 1 = 0 & \textit{(en multipliant par } \ell \neq 0\textit{)} \end{array}$$
    Absurde !
  - × si $\ell = 0$. Par définition de (x_n) :
    $$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$
    Ainsi, par passage à la limite :
    $$0 \;=\; 0 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \;=\; +\infty$$
    Absurde !

On en déduit que (x_n) n'est pas majorée.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$$

□

13. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

Démonstration.

- Par définition de la suite (x_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$.

  La nature de la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ est donc la même que celle de la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$.

- Déterminons la nature de la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} x_k} + x_{n+1} \right) - \left(x_0 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right) \\
&= x_{n+1} - x_0
\end{aligned}$$

  Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_0 = +\infty$.

  Ainsi la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \right)$ diverge vers $+\infty$. La série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ est donc divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit la série } \sum \frac{1}{x_n} \text{ est divergente.}}$$

Commentaire

Le lecteur plus à l'aise avec le télescopage pourra se permettre de ne pas détailler le décalage d'indice. On obtient la rédaction suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0 \qquad \textit{(par télescopage)}$$

□

14. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ {x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
&\text{On a} && x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_k} && \textit{(par définition de la suite } (x_n)\textit{)} \\
&\text{donc} && x_{k+1}^2 = \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2 \\
&\text{ainsi} && x_{k+1}^2 = x_k^2 + 2\,\cancel{x_k}\,\frac{1}{\cancel{x_k}} + \frac{1}{x_k^2}
\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En sommant les égalités précédentes pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{x_k^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\ &= 2\,\big((n-1) - 0 + 1\big) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\ &= 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}\end{aligned}$$
De plus :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2} + x_n^2\right) - \left(x_0^2 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}\right) \\ &= x_n^2 - x_0^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^2 - x_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}.}$$
□

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

Démonstration.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :
$$\begin{aligned} & x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \\ \text{donc} \quad & \frac{x_n^2}{n} = \frac{1}{n}\left(x_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}\right) \\ \text{d'où} \quad & \frac{x_n^2}{n} = \frac{x_0^2}{n} + 2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}\end{aligned}$$
- On a supposé dans cette question ***5.a)*** que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{x_n^2}$ converge et : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x_k^2} = \ell$.
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}\right) = 0 \times \ell = 0$.
- De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0^2}{n} = 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2}{n} = 0 + 2 + 0 = 2.}$$
□

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{n} = 2 \neq 0$. On en déduit : $\dfrac{x_n^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
  Ainsi : $\dfrac{n}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}.}$$

- On a :
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2n} \geqslant 0$
  × $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.
  Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n}$.
  (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\dfrac{1}{2} \neq 0$*)*

  Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.

$$\boxed{\text{Cette conclusion est absurde puisqu'on a supposé que la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x_n^2} \text{ est convergente.}}$$ □

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

Démonstration.
Démontrons par l'absurde que $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.
Supposons que la série $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est convergente.
Alors, d'après la question ***5.a)***, la série $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ est divergente.
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum \dfrac{1}{x_n^2} \text{ est divergente.}}$$ □

15. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln(k) \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{rcccccl} & k & \leqslant & x & \leqslant & k+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{x} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{k} & & [\ \ln(|x|)\ ]_k^{k+1} & & \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à n ($n \geqslant 1$).

$$\begin{array}{lcccccl} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par sommation télescopique)} \\ \text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & H_{n+1} - 1 & \leqslant & \ln(n+1) & \leqslant & H_n & \textit{(par définition de } H_n\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a donc démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n.}$$

En particulier, l'inégalité de gauche de l'énoncé est démontrée.
Il reste à déterminer l'inégalité de droite.

- D'après ce qui précède : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $H_{m+1} \leqslant 1 + \ln(m+1)$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, en considérant ces inégalités en $m = n-1 \geqslant 1$, on obtient :

$$H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ H_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

- Remarquons enfin :

  × $H_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$,

  × $1 + \ln(1) = 1$.

  On a donc bien : $H_1 \leqslant 1 + \ln(1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

□

Commentaire

- Les questions ***6.a)*** et ***6.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite (H_n) (on peut alors choisir n dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\frac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

- Or :

  × $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

  × $\frac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\frac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

  où γ ($\simeq 0,577$), appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(H_n - \ln(n)\big)$.
  La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes.

16. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

Démonstration.
Démontrer $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ revient à prouver : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***5.a)(i)*** :

$$x_n^2 = 2n + x_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{x_n^2}{2n} = 1 + \frac{x_0^2}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2}$$

- Or :
  - × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0^2}{2n} = 0$.
  - × d'autre part, d'après le résultat admis en question ***7.*** :

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{\ln(n)}{4n}$$

  Par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$.

  Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1 + 0 + 0 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.}$$

□

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

Démonstration.
D'après la question précédente : $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$. Comme la suite (x_n) est à termes strictement positifs : $\sqrt{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'en toute généralité, on ne compose pas les équivalents !
- On dispose tout de même de la propriété de compatibilité de l'équivalent avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \text{ strictement positive à} \\ \text{partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \Rightarrow \ (u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$$

On utilise ici cette propriété pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n^2$ et $v_n = 2n$.

□

Exercice III

On dispose d'une urne $\mathcal{A}$ contenant 5 boules vertes et 5 boules rouges, et d'une urne $\mathcal{B}$ contenant 15 boules vertes et 5 boules rouges. On effectue N tirages successifs dans ces urnes (où $N \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant 2$) de la façon suivante :

- pour le premier tirage, on choisit une des deux urnes au hasard, et on tire une boule de cette urne.
- pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, si la boule obtenue au $n^{\text{ème}}$ tirage est verte, alors on tire la boule suivante dans la même urne, sinon, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- tous les tirages se font avec remise de la boule tirée dans l'urne d'où elle provient.

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on définit les événements :

$$A_n \quad : \quad \text{« le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \text{ »}$$

$$V_n \quad : \quad \text{« la } n^{\text{ème}} \text{ boule tirée est verte »}$$

On note de plus : $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$.

17. Justifier : $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Le choix de l'urne s'effectue au hasard. On est donc en situation d'équiprobabilité.

$$\boxed{\text{Ainsi : } a_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}.}$$

□

18. Démontrer : $\forall n \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(V_n \mid A_n) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $n \in [\![1, N]\!]$.

- Si l'événement A_n est réalisé, c'est que le $n^{\text{ème}}$ tirage est effectué dans l'urne $\mathcal{A}$.
- Dans ce cas, l'événement V_n est réalisé si et seulement si la $n^{\text{ème}}$ boule est verte. Cette boule est tirée dans l'urne $\mathcal{A}$ qui contient 5 boules vertes et 10 boules en tout.

Comme on est en situation d'équiprobabilité : $\mathbb{P}(V_n \mid A_n) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(V_n \mid A_n) = \frac{1}{2}}$$

□

19. Démontrer : $\forall n \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n}) = \dfrac{3}{4}$.

Démonstration.

- Si l'événement $\overline{A_n}$ est réalisé, c'est que le $n^{\text{ème}}$ tirage est effectué dans l'urne $\mathcal{B}$.
- Dans ce cas, l'événement V_n est réalisé si et seulement si la $n^{\text{ème}}$ boule est verte. Cette boule est tirée dans l'urne $\mathcal{B}$ qui contient 15 boules vertes et 20 boules en tout.

Comme on est en situation d'équiprobabilité : $\mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n}) = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall n \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n}) = \frac{3}{4}}$$

□

20. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$.

a) Justifier : $A_{n+1} = (A_n \cap V_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{V_n})$.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{array}{cl}
& \text{L'événément } A_{n+1} \text{ est réalisé} \\[6pt]
\Leftrightarrow & \text{Le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \\[6pt]
\Leftrightarrow & \begin{array}{cl} & (\text{Le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \\ \texttt{ET} & \text{on n'a pas changé d'urne pour le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ tirage}) \end{array} \\[4pt]
& \texttt{OU} \quad \begin{array}{cl} & (\text{Le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{B} \\ \texttt{ET} & \text{on a changé d'urne pour le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ tirage}) \end{array} \\[6pt]
\Leftrightarrow & \begin{array}{cl} & (\text{Le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \\ \texttt{ET} & \text{on a tiré une boule verte } n^{\text{ème}} \text{ tirage}) \end{array} \\[4pt]
& \texttt{OU} \quad \begin{array}{cl} & (\text{Le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{B} \\ \texttt{ET} & \text{on a tiré une boule rouge } n^{\text{ème}} \text{ tirage}) \end{array} \\[6pt]
\Leftrightarrow & \begin{array}{cl} & (\text{L'événement } A_n \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{l'événement } V_n \text{ est réalisé}) \end{array} \\[4pt]
& \texttt{OU} \quad \begin{array}{cl} & (\text{L'événement } \overline{V_n} \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{l'événement } \overline{A_n} \text{ est réalisé}) \end{array} \\[6pt]
\Leftrightarrow & \text{L'événement } (A_n \cap V_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{V_n}) \text{ est réalisé}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A_{n+1} = (A_n \cap V_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{V_n}).}$$

□

b) Démontrer : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}\, a_n + \dfrac{1}{4}$.

Démonstration. Par définition de a_{n+1} :

$$\begin{array}{rcll}
a_{n+1} & = & \mathbb{P}(A_{n+1}) & \\[4pt]
& = & \mathbb{P}\Big((A_n \cap V_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{V_n})\Big) & \\[4pt]
& = & \mathbb{P}(A_n \cap V_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap \overline{V_n}) & \textit{(car } A_n \cap V_n \textit{ et } \overline{A_n} \cap \overline{V_n} \textit{ sont incompatibles)} \\[4pt]
& = & \mathbb{P}(V_n \mid A_n)\, \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(\overline{V_n} \mid \overline{A_n})\, \mathbb{P}(\overline{A_n}) & \\[4pt]
& = & \dfrac{1}{2}\, a_n + \big(1 - \mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n})\big)\, \big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{18.}}\textit{)} \\[4pt]
& = & \dfrac{1}{2}\, a_n + \left(1 - \dfrac{3}{4}\right) (1 - a_n) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{19.}}\textit{)} \\[4pt]
& = & \dfrac{1}{2}\, a_n + \dfrac{1}{4}\, (1 - a_n) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } a_{n+1} = \dfrac{1}{4}\, a_n + \dfrac{1}{4}.}$$

□

c) En déduire une expression explicite de a_n en fonction de n.

Démonstration.
D'après la question précédente, la suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique.

- On commence par résoudre l'équation de point fixe associée à (a_n).
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$x = \frac{1}{4}\, x + \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{4}\, x = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{3} = \frac{1}{3}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  $$\left\{ \begin{array}{rcccc} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{4} \times a_n & + & \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{3} & = & \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} & + & \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$$
  En effectuant la soustraction $L_1 - L_2$, on obtient :
  $$a_{n+1} - \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{4}\, \left(a_n - \frac{1}{3} \right)$$
  Ainsi, la suite $\left(a_n - \dfrac{1}{3} \right)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
- On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - \dfrac{1}{3} = \left(a_1 - \dfrac{1}{3} \right) \left(\dfrac{1}{4} \right)^{n-1}$. Or, d'après ***17.*** :
  $$a_1 - \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{6}$$
  $$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^{n-1}}.}$$

□

21. Les événements A_n et A_{n+1} sont-ils indépendants ?
Les événements A_1, A_2, ..., A_N sont-ils indépendants ?

Démonstration.

- D'une part, d'après la question précédente :
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1}) & = & a_n \times a_{n+1} \\[1ex] & = & \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}} \right) \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6 \times 4^{n}} \right) \\[2ex] & = & \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{18 \times 4^{n}} + \dfrac{1}{18 \times 4^{n-1}} + \dfrac{1}{36 \times 4^{2n-1}} \end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rl} & \text{L'événément } A_n \cap A_{n+1} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{Le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \\ \texttt{ET} & \text{Le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{Le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \\ \texttt{ET} & \text{on a tiré une boule verte } n^{\text{ème}} \text{ tirage} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{L'événement } A_n \text{ est réalisé} \\ \texttt{ET} & \text{l'événement } V_n \text{ est réalisé} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } (A_n \cap V_n) \text{ est réalisé} \end{array}$$

Ainsi : $A_n \cap A_{n+1} = A_n \cap V_n$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) & = & \mathbb{P}(A_n \cap V_n) & \\ & = & \dfrac{1}{2}\, a_n & \textit{(d'après les calculs de } \textbf{\textit{20.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}}\right) & \\ & = & \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12 \times 4^{n-1}} & \end{array}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) \neq \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1})$$

$$\boxed{\text{Les événements } A_n \text{ et } A_{n+1} \text{ ne sont donc pas indépendants.}}$$

- D'après ce qui précède, on sait en particulier que les événements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

$$\boxed{\text{On en conclut que les événements } A_1, \ldots, A_N \text{ ne sont pas mutuellement indépendants.}}$$ □

22. Soit $n \in [\![1, N]\!]$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales sur un système complet d'événements adéquat, démontrer : $v_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\, a_n$.

Démonstration.
La famille $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} v_n & = & \mathbb{P}(V_n) & \\ & = & \mathbb{P}(V_n \cap A_n) + \mathbb{P}(V_n \cap \overline{A_n}) & \\ & = & \mathbb{P}(V_n \mid A_n)\, \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n})\, \mathbb{P}(\overline{A_n}) & \\ & = & \dfrac{1}{2}\, a_n + \dfrac{3}{4}\, \big(1 - \mathbb{P}(A_n)\big) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{18.}} \textit{ et } \textbf{\textit{19.}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2}\, a_n + \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}\, a_n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } v_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\, a_n.}$$ □

b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Démonstration.
D'après la question ***20.c)***, on obtient :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\, a_n \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6 \times 4^n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } v_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{6 \times 4^n}.}$$

□

23. Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Calculer la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ tirage ait été effectué dans l'urne $\mathcal{A}$, sachant que la boule obtenue est verte.
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

Démonstration.

- On cherche ici à calculer $\mathbb{P}(A_n \mid V_n)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n \mid V_n) &= \frac{\mathbb{P}(A_n \cap V_n)}{\mathbb{P}(V_n)} && \textit{(par définition de la probabilité conditionnelle)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12 \times 4n-1}}{\mathbb{P}(V_n)} && \textit{(d'après les calculs de } \textbf{\textit{21.}}\textit{)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12 \times 4^{n-1}}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6 \times 4^n}} && \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(A_n \mid V_n) = \frac{1 + \frac{1}{2 \times 4^{n-1}}}{4 + \frac{1}{4^n}}.}$$

- On vient de montrer, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(A_n \mid V_n) = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{4 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

Or : $\dfrac{1}{4} \in \,]-1, 1[$. On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n \mid V_n) = \frac{1}{4}.}$$

□

24. On considère les événements :

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{« tous les tirages sont effectués dans l'urne } \mathcal{A} \text{ »} \\ B & : & \text{« tous les tirages sont effectués dans l'urne } \mathcal{B} \text{ »} \\ V & : & \text{« toutes les boules tirées sont vertes »} \end{array}$$

a) Démontrer : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2^N}$.

b) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{N-1}$.

c) Exprimer l'événement V à l'aide des événements A, B et V_N.

d) En déduire $\mathbb{P}(V)$.