DS8 /107

Exercice I /44

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \ = \ (1 - X - X^2)\, P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\, X^2 + 2\, X^3)\, P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **1 pt : caractère morphisme**
- **3 pts : caractère endo ($f(P)$ est un polynôme + de degré 3 au max)**

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

- **2 pts :**
  - × **0,5 pt par $f(P_i)$.**

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - × **0,5 pour** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- **1 pt :** $A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

- **1 pt :** A **non inversible**

5. *a)* Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : écriture système**
  - × **1 pt : résolution** $a_1 = a_2$
  - × **1 pt :** $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)$

  -1 pt si confusion $\mathbb{R}_2[X]$ / $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- **2 pts :** $(P_0, P_1 + P_2)$ **base et** $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2$
  - $\times$ **caractère générateur**
  - $\times$ **caractère libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2))$
- **1 pt :** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(P_0 - P_1 - P_2)$
- **1 pt :** $(P_0 - P_1 - P_2)$ **base de** $\mathrm{Im}(f)$ **et** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1$

  -1 pt si confusion $\mathbb{R}_2[X]$ / $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $\big(f(P_1), P_0\big) \in \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^2$
- **2 pts :** $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ **base de** $\mathrm{Ker}(f)$
  - $\times$ **1 pt : caractère libre**
  - $\times$ **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

- **2 pts :** $\mathcal{G}$ **libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$

b) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

- **2 pts :**
  - $\times$ **1,5 pts :**

$$\mathrm{Mat}_{(P_1, f(P_1), P_0)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{(P_1, f(P_1), P_0)}\Big(b\big(f(P_1)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{(P_1, f(P_1), P_0)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - $\times$ **0,5 pt :** $\mathrm{Mat}_{(P_1, f(P_1), P_0)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

- **3 pts :**
  - $\times$ **1 pt : raisonnement par double implication**
  - $\times$ **1 pt :** $(\Rightarrow)$
  - $\times$ **1 pt :** $(\Leftarrow)$

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. ***a)*** Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

- **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \in \{0,1\}$
- **1 pt : cas** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 0$ **impossible**
- **1 pt :** $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1$ **et** $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2$**.**

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $\big(f(u), v\big) \in \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^2$
- **3 pts : caractère libre**
  - × **1 pt : écriture correcte de la définition de liberté**
  - × **1 pt : appliquer** f **de part et d'autre et en conclure** $\lambda_2 = 0$
  - × **1 pt :** $\lambda_1 = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$

b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E.

- **3 pts : caractère libre**
  - × **1 pt : écriture correcte de la définition de liberté**
  - × **1 pt : appliquer** f **de part et d'autre et en conclure** $\lambda_3 = 0$
  - × **1 pt :** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = \dim\big(E\big)$

c) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $(u, f(u), v)$.

- **2 pts :**
  - × **1,5 pts :**

$$\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\Big(b\big(f(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - × **0,5 pt :** $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice II /35

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

- **1 pt : (x_n) est (strictement) croissante**

3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

- **4 pts : raisonnement par l'absurde pour (x_n) non majorée**
  - × **1 pt : structure du raisonnement par l'absurde**
  - × **1 pt : par passage à la limite : $\ell \geqslant 0$**
  - × **1 pt : absurdité si $\ell > 0$ (en passant à la limite dans la relation de récurrence)**
  - × **1 pt : absurdité si $\ell = 0$ (même démarche)**
- **1 pt : (x_n) croissante non majorée donc elle diverge vers $+\infty$**

4. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

- **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$**
- **1 pt : télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc $\sum \dfrac{1}{x_n}$ divergente**

5. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ {x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

- **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1}^2 - x_k^2 = 2 + \dfrac{1}{x_k^2}$**
- **1 pt : sommation pour k variant de 0 à $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)**
- **1 pt : télescopage : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = x_n^2 - x_0^2$**

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

- **1 pt : $\dfrac{x_n^2}{n} = \dfrac{x_0^2}{n} + 2 + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}$**
- **1 pt : comme $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$**

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

- **1 pt :** $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$
- **3 pts : critère d'équivalence des SATP (1 pt par hypothèse, notamment la positivité)**
- **1 pt : il est absurde de trouver que** $\sum \dfrac{1}{x_n^2}$ **diverge alors qu'on a supposé que cette série converge**

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**

6. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln(k)\ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

- **1 pt : décroissance de la fonction inverse sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)\ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- **1 pt : sommation télescopique**
- **1 pt :** $H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n$
- **1 pt :** $H_n \leqslant 1 + \ln(n)$

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

- **1 pt : division par** $\ln(n) > 0$
  0 pt si $n \geqslant 2$ non précisé
- **1 pt :** $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ **par théorème d'encadrement**

7. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

- **1 pt : d'après résultat de l'énoncé :** $\dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{4n}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2} = 0$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{2n} = 1$

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

- **1 pt :** $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$
  0 pt si oubli de l'argument de stricte positivité

Exercice III /28

On dispose d'une urne $\mathcal{A}$ contenant 5 boules vertes et 5 boules rouges, et d'une urne $\mathcal{B}$ contenant 15 boules vertes et 5 boules rouges. On effectue N tirages successifs dans ces urnes (où $N \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant 2$) de la façon suivante :

- pour le premier tirage, on choisit une des deux urnes au hasard, et on tire une boule de cette urne.
- pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, si la boule obtenue au $n^{\text{ème}}$ tirage est verte, alors on tire la boule suivante dans la même urne, sinon, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- tous les tirages se font avec remise de la boule tirée dans l'urne d'où elle provient.

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on définit les événements :

$$\begin{array}{lcl} A_n & : & \text{« le } n^{\text{ème}} \text{ tirage est effectué dans l'urne } \mathcal{A} \text{ »} \\ V_n & : & \text{« la } n^{\text{ème}} \text{ boule tirée est verte »} \end{array}$$

On note de plus : $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$.

1. Justifier : $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt : argument d'équiprobabilité**

2. Démontrer : $\forall n \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(V_n \mid A_n) = \dfrac{1}{2}$.

- **1 pt**

3. Démontrer : $\forall n \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n}) = \dfrac{3}{4}$.

- **1 pt**

4. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$.

a) Justifier : $A_{n+1} = (A_n \cap V_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{V_n})$.

- **1 pt**

b) Démontrer : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}\, a_n + \dfrac{1}{4}$.

- **1 pt : incompatibilité de** $A_n \cap V_n$ **et** $\overline{A_n} \cap \overline{V_n}$
- **1 pt : utilisation questions *18.* et *19.***

c) En déduire une expression explicite de a_n en fonction de n.

- **1 pt : résolution de l'équation de point fixe (solution :** $\dfrac{1}{3}$**)**
- **1 pt : montrer que la suite** $\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$ **est géométrique de raison** $\dfrac{1}{4}$
- **1 pt :** $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4^{n-1}}$

5. Les événements A_n et A_{n+1} sont-ils indépendants ?
Les événements A_1, A_2, ..., A_N sont-ils indépendants ?

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{18 \times 4^n} + \dfrac{1}{18 \times 4^{n-1}} + \dfrac{1}{36 \times 4^{2n-1}}$
- **1 pt :** $A_n \cap A_{n+1} = A_n \cap V_n$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12 \times 4^{n-1}} \neq \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1})$
- **1 pt :** A_1 **et** A_2 **ne sont pas indépendants, donc** A_1**, ...,** A_N **ne sont pas mutuellement indépendants**

6. Soit $n \in [\![1, N]\!]$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales sur un système complet d'événements adéquat, démontrer : $v_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\, a_n$.

- **1 pt : FPT sur le SCE** $(A_n, \overline{A_n})$
- **1 pt : fin du calcul**

b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n \mid V_n) = \dfrac{1 + \frac{1}{2 \times 4^{n-1}}}{4 + \frac{1}{4^n}}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{4} \in\,]-1, 1[$**, donc :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n \mid V_n) = \dfrac{1}{4}$

7. Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Calculer la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ tirage ait été effectué dans l'urne $\mathcal{A}$, sachant que la boule obtenue est verte.
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

8. On considère les événements :

A : « tous les tirages sont effectués dans l'urne $\mathcal{A}$ »

B : « tous les tirages sont effectués dans l'urne $\mathcal{B}$ »

V : « toutes les boules tirées sont vertes »

a) Démontrer : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2^N}$.

- **1 pt :** $A = \bigcap\limits_{k=1}^{N} A_k$
- **1 pt : FPC**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(A_{n+1} \mid \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\Big) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \mathbb{P}(V_n \mid A_n) = \dfrac{1}{2}$

b) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{N-1}$.

- **1 pt :** $B = \bigcap\limits_{k=1}^{N} \overline{A_k}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(\overline{A_{n+1}} \mid \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) = \mathbb{P}(\overline{A_{n+1}} \mid \overline{A_n}) = \mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n}) = \dfrac{3}{4}$

c) Exprimer l'événement V à l'aide des événements A, B et V_N.

- **2 pts :** $V = (A \cup B) \cap V_N = (A \cap V_N) \cup (B \cap V_N)$

d) En déduire $\mathbb{P}(V)$.

- **1 pt :** $A \cap V_N$ **et** $B \cap V_N$ **incompatibles (car** A **et** B **le sont)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(V_N \mid A) = \mathbb{P}(V_N \mid A_N) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(V_N \mid B) = \mathbb{P}(V_N \mid \overline{A_N}) = \dfrac{3}{4}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(V) = \dfrac{1}{2^{N+1}} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{N}$