DS8

Exercice I

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \;=\; (1 - X - X^2)\,P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\,P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

5. ***a)*** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. ***a)*** Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Exercice II

Soit un réel $x_0 > 0$. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

10. Démontrer que la suite (x_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

11. Montrer que la suite (x_n) est monotone et préciser sa monotonie.

12. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

13. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{x_n}$.

14. Le but de cette question est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$.

a) On suppose dans cette question que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ converge. On note ℓ sa somme ($\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{{x_k}^2}$).

(i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${x_n}^2 - {x_0}^2 = 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{{x_k}^2}$.

(ii) En déduire que la suite $\left(\dfrac{{x_n}^2}{n}\right)$ converge vers 2.

(iii) En déduire un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{{x_n}^2}\right)$.
Cela est-il cohérent avec la supposition initiale ?

b) Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{{x_n}^2}$ diverge.

15. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \ \leqslant\ \ln(k+1) - \ln(k) \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

c) Déterminer un équivalent simple de la suite (H_n).

16. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{{x_k}^2}$. Dans la suite, on admet :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\, H_n$$

a) En utilisant le résultat de la question ***5.a)(i)***, démontrer : ${x_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

b) En déduire un équivalent de la suite (x_n).

Exercice III

On dispose d'une urne $\mathcal{A}$ contenant 5 boules vertes et 5 boules rouges, et d'une urne $\mathcal{B}$ contenant 15 boules vertes et 5 boules rouges. On effectue N tirages successifs dans ces urnes (où $N \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant 2$) de la façon suivante :

- pour le premier tirage, on choisit une des deux urnes au hasard, et on tire une boule de cette urne.
- pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, si la boule obtenue au $n^{\text{ème}}$ tirage est verte, alors on tire la boule suivante dans la même urne, sinon, on tire la boule suivante dans l'autre urne.
- tous les tirages se font avec remise de la boule tirée dans l'urne d'où elle provient.

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on définit les événements :

A_n : « le $n^{\text{ème}}$ tirage est effectué dans l'urne $\mathcal{A}$ »

V_n : « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est verte »

On note de plus : $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$.

17. Justifier : $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

18. Démontrer : $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(V_n \mid A_n) = \dfrac{1}{2}$.

19. Démontrer : $\forall n \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(V_n \mid \overline{A_n}) = \dfrac{3}{4}$.

20. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$.

a) Justifier : $A_{n+1} = (A_n \cap V_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{V_n})$.

b) Démontrer : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}\, a_n + \dfrac{1}{4}$.

c) En déduire une expression explicite de a_n en fonction de n.

21. Les événements A_n et A_{n+1} sont-ils indépendants ?
Les événements A_1, A_2, ..., A_N sont-ils indépendants ?

22. Soit $n \in [\![1, N]\!]$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales sur un système complet d'événements adéquat, démontrer : $v_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\, a_n$.

b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

23. Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Calculer la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ tirage ait été effectué dans l'urne $\mathcal{A}$, sachant que la boule obtenue est verte.
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$?

24. On considère les événements :

A : « tous les tirages sont effectués dans l'urne $\mathcal{A}$ »

B : « tous les tirages sont effectués dans l'urne $\mathcal{B}$ »

V : « toutes les boules tirées sont vertes »

a) Démontrer : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2^N}$.

b) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{N-1}$.

c) Exprimer l'événement V à l'aide des événements A, B et V_N.

d) En déduire $\mathbb{P}(V)$.