DS7

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n et d'une pièce équilibrée. On commence par piocher un jeton au hasard dans l'urne. Si le jeton obtenu est le jeton numéro k, alors on lance k fois la pièce.
Pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, on note :

J_k : « obtenir le jeton numéro k »

A_i : « obtenir exactement i Pile au cours de l'expérience »

1. Soit $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$.

a) Supposons : $i \leqslant k$. Démontrer : $\mathbb{P}(A_i \mid J_k) = \dbinom{k}{i} \dfrac{1}{2^k}$.

Démonstration.

- Si l'événement J_k est réalisé, c'est qu'on a pioché le jeton numéro k dans l'urne. On lance alors k fois la pièce.
- Dans ce cas, l'événement A_i est réalisé si et seulement si on obtient exactement i Pile au cours des k lancers effectués.
  Un k-tirage réalisant l'événement A_i est de plus entièrement déterminer par :
  × la position des i Pile parmi les k lancers : $\dbinom{k}{i}$ possibilités.

Comme on est en situation d'équiprobabilité (car la pièce est équilibrée) :

$$\mathbb{P}(A_i \mid J_k) = \frac{\dbinom{k}{i}}{2^k}$$

$$\boxed{\text{Si } i \leqslant k, \text{ alors : } \mathbb{P}(A_i \mid J_k) = \dbinom{k}{i} \dfrac{1}{2^k}.}$$

□

b) Que vaut $\mathbb{P}(A_i \mid J_k)$ dans le cas où $i > k$? Justifier.

Démonstration.

- Si l'événement J_k est réalisé, c'est qu'on a pioché le jeton numéro k dans l'urne. On lance alors k fois la pièce.
- Dans ce cas, l'événement A_i est réalisé si et seulement si on obtient exactement i Pile au cours des k lancers effectués.
  Ceci est impossible lorsque $i > k$: on ne peut obtenir strictement plus de Pile que de lancers.

$$\boxed{\text{On en déduit que, si } i > k, \text{ alors : } \mathbb{P}(A_i \mid J_k) = 0.}$$

□

2. Démontrer alors : $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=i}^{n} \dbinom{k}{i} \dfrac{1}{2^k}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- La famille $(J_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A_i) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap J_k) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \mid J_k)\, \mathbb{P}(J_k) \end{array}$$

- Or, on pioche de façon équiprobable 1 jeton parmi les n jetons de l'urne. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}(J_k) = \frac{1}{n}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(A_i) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\mathbb{P}(A_i \mid J_k) \times \dfrac{1}{n} \right) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \mid J_k) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(A_i \mid J_k)} + \sum\limits_{k=i}^{n} \mathbb{P}(A_i \mid J_k) \right) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=i}^{n} \dbinom{k}{i} \dfrac{1}{2^k} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{1.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \, \mathbb{P}(A_i) = \sum\limits_{k=i}^{n} \dbinom{k}{i} \dfrac{1}{2^k}}$$

□

Problème I (Centrale PC 2021 Maths II)

Dans tout ce sujet, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et w est une fonction continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$; on dit que w est *un poids* sur I.
Étant donnée une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que l'intégrale de fw sur I est bien définie, on cherche à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)\,w(x)\;dx$ par une expression de la forme :

$$I_n(f) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, f(x_j)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.
Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note :

$$e(f) \;=\; \int_I f(x)\,w(x)\;dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale de fw sur I est bien définie.
On rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* si son coefficient dominant est 1.
Étant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si :

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X],\; e(P) = 0$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m :

$$\int_I P(x)\,w(x)\;dx \;=\; \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, P(x_j)$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

A - Exemples élémentaires

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas $I = [0,1]$ et : $\forall x \in I,\; w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\;dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée à $e(f)$.

Commentaire

La fonction $I_0 : f \mapsto f(0)$ fournit bien une formule de quadrature. En effet, en choisissant :
- × $\lambda_0 = 1$
- × $x_0 = 0$

on obtient : $\displaystyle\sum_{j=0}^{0} \lambda_j\, f(x_j) = \lambda_0\, f(x_0) = f(0) = I_0(f)$.

Démonstration.

- Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $P(X) = \mu$.
  - × Tout d'abord, la fonction polynomiale associée à P est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\int_0^1 P(t)\, dt$ est donc bien définie.
  - × De plus :

$$\int_0^1 P(t)\, dt \ = \ \int_0^1 \mu\, dt \ = \ \mu\ [\ t\ ]_0^1 \ = \ \mu\,(1-0) \ = \ \mu \ = \ P(0)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la formule } I_0(\cdot) \text{ est exacte sur } \mathbb{R}_0[X].}$$

- Notons Q le polynôme défini par : $Q(X) = X$. Alors $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ et :
  - × d'une part : $Q(0) = 0$.
  - × d'autre part :

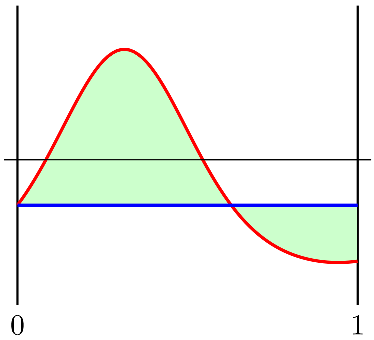
$$\int_0^1 Q(t)\, dt \ = \ \int_0^1 t\, dt \ = \ \left[\ \frac{t^2}{2}\ \right]_0^1 \ = \ \frac{1}{2} - 0$$

On remarque : $\int_0^1 Q(t)\, dt \neq Q(0) = I_0(Q)$.

$$\boxed{\text{La formule } I_0(\cdot) \text{ n'est donc pas exacte sur } \mathbb{R}_1[X].}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'ordre de la formule de quadrature } I_0(\cdot) \text{ est } 0.}$$

- On peut représenter l'erreur associée à $e(\cdot)$ de la façon suivante.



$e(f)$ est la valeur de l'aire

□

4. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Commentaire

La fonction $I_0 : f \mapsto f\left(\frac{1}{2}\right)$ fournit bien une formule de quadrature. En effet, en choisissant :
- × $\lambda_0 = 1$
- × $x_0 = \frac{1}{2}$

on obtient : $\sum\limits_{j=0}^{0} \lambda_j\, f(x_j) = \lambda_0\, f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = I_0(f)$.

Démonstration.

- Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $P(X) = aX + b$.
  - × Tout d'abord, la fonction polynomiale associée à P est continue sur le segment $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$ est donc bien définie.
  - × De plus :

$$\int_0^1 P(t)\,dt \;=\; \int_0^1 a\,t + b\,dt \;=\; \left[\, a\,\frac{t^2}{2} + b\,t \,\right]_0^1 \;=\; a\,\frac{1}{2} + b \;=\; P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la formule } I_0(\cdot) \text{ est exacte sur } \mathbb{R}_1[X].}$$

- Notons Q le polynôme défini par : $Q(X) = X^2$. Alors $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et :
  - × d'une part : $Q\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.
  - × d'autre part :

$$\int_0^1 Q(t)\,dt \;=\; \int_0^1 t^2\,dt \;=\; \left[\,\frac{t^3}{3}\,\right]_0^1 \;=\; \frac{1}{3} - 0$$

  On remarque : $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,dt \neq Q\left(\frac{1}{2}\right) = I_0(Q)$.

$$\boxed{\text{La formule } I_0(\cdot) \text{ n'est donc pas exacte sur } \mathbb{R}_2[X].}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'ordre de la formule de quadrature } I_0(\cdot) \text{ est 1.}}$$

□

5. Déterminer les coefficients λ_0, λ_1, λ_2 pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0\,f(0) + \lambda_1\,f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \lambda_2\,f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

Démonstration.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Supposons que $I_2 : f \mapsto \lambda_0\,f(0) + \lambda_1\,f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \lambda_2\,f(1)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Autrement dit :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \int_0^1 P(t)\,dt \;=\; I_2(P)$$

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P(X) = aX^2 + bX + c$.
  - × D'une part :

$$\begin{aligned} I_2(P) &= \lambda_0\,P(0) + \lambda_1\,P\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2\,P(1) \\ &= \lambda_0\,c + \lambda_1\left(\frac{1}{4}\,a + \frac{1}{2}\,b + c\right) + \lambda_2\,(a+b+c) \\ &= \left(\frac{1}{4}\,\lambda_1 + \lambda_2\right)a + \left(\frac{1}{2}\,\lambda_1 + \lambda_2\right)b + (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\,c \end{aligned}$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(t)\ dt &= \int_0^1 a\,t^2 + b\,t + c\ dt \\ &= \left[a\ \frac{t^3}{3} + b\ \frac{t^2}{2} + c\,t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\ a + \frac{1}{2}\ b + c \end{aligned}$$

Comme la formule de quadrature $I_2(\cdot)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$, alors :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt & = & I_2(P) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{3}\ a + \dfrac{1}{2}\ b + c & = & \left(\dfrac{1}{4}\ \lambda_1 + \lambda_2\right) a + \left(\dfrac{1}{2}\ \lambda_1 + \lambda_2\right) b + (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\, c \end{array}$$

Cette égalité est valable pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est donc valide en particulier pour :

× $P(X) = 1$, c'est le cas où : $a = b = 0$ et $c = 1$. On obtient l'équation suivante :

$$1 \ = \ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$$

× $P(X) = X$, c'est le cas où : $a = c = 0$ et $b = 1$. On obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{2}\ \lambda_1 + \lambda$$

× $P(X) = X^2$, c'est le cas où : $b = c = 0$ et $a = 1$. On obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{3} \ = \ \frac{1}{4}\ \lambda_1 + \lambda_2$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & \frac{1}{2}\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{4}\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \qquad (*)$$

Or :

$$(*) \ \underset{L_3 \leftarrow 12\,L_3}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2}{\iff}} \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & = & 1 \\ & & 3\,\lambda_1 & + & 12\,\lambda_2 & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_2}{\iff} \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & = & 1 \\ & & & & 6\,\lambda_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 3\,L_2 - L_3}{\overset{L_1 \leftarrow 6\,L_1 - L_3}{\iff}} \ \left\{ \begin{array}{ccccc} 6\,\lambda_0 & + & 6\,\lambda_1 & = & 5 \\ & & 3\,\lambda_1 & = & 2 \\ & & 6\,\lambda_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_2}{\iff} \ \left\{ \begin{array}{ccc} 6\,\lambda_0 & = & 1 \\ 3\,\lambda_1 & = & 2 \\ 6\,\lambda_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\lambda_0 = \frac{1}{6}, \qquad \lambda_1 = \frac{2}{3}, \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

- **Synthèse**
  Supposons :
$$\lambda_0 = \frac{1}{6}, \qquad \lambda_1 = \frac{2}{3}, \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{6}$$
  Démontrons que la formule $I_2(\cdot)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P(X) = aX^2 + bX + c$.
  D'après les calculs faits dans l'analyse :
  × d'une part : $\displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt = \frac{1}{3}\, a + \frac{1}{2}\, b + c$.
  × d'autre part :
$$\begin{aligned} I_2(P) &= \left(\frac{1}{4}\, \lambda_1 + \lambda_2\right) a + \left(\frac{1}{2}\, \lambda_1 + \lambda_2\right) b + (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\, c \\ &= \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) a + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) b + \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) c \\ &= \frac{1}{3}\, a + \frac{1}{2}\, b + c \end{aligned}$$
  On en déduit que la formule de quadrature $I_2 : f \mapsto \dfrac{1}{6}\, f(0) + \dfrac{2}{3}\, f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{6}\, f(1)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$.

  On en conclut que la formule
  $\boxed{I_2 : f \mapsto \dfrac{1}{6}\, f(0) + \dfrac{2}{3}\, f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{6}\, f(1) \text{ est exacte sur } \mathbb{R}_2[X].}$

Commentaire

On aurait pu se contenter de chercher les valeurs de λ_0, λ_1 et λ_2 qui conviennent au brouillon et rédiger seulement la synthèse sur la copie. On présente ici néanmoins la totalité du raisonnement pour faire comprendre au lecteur comment s'effectue la recherche des valeurs λ_0, λ_1 et λ_2 souhaitées.

- On cherche maintenant à savoir si cette formule de quadrature est d'ordre 2.
  Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.
  × D'une part :
$$\begin{aligned} \int_0^1 P(t)\, dt &= \int_0^1 a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3\, dt \\ &= \left[\, a_0\, t + a_1\, \frac{t^2}{2} + a_2\, \frac{t^3}{3} + a_3\, \frac{t^4}{4}\, \right]_0^1 \\ &= a_0 + \frac{1}{2}\, a_1 + \frac{1}{3}\, a_2 + \frac{1}{4}\, a_3 \end{aligned}$$

× D'autre part :

$$\begin{aligned} I_2(P) &= \frac{1}{6}\, P(0) + \frac{2}{3}\, P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\, P(1) \\ &= \frac{1}{6}\, a_0 + \frac{2}{3} \left(a_0 + \frac{1}{2}\, a_1 + \frac{1}{4}\, a_2 + \frac{1}{8}\, a_3 \right) + \frac{1}{6}\, (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) a_0 + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) a_1 + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) a_2 + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right) a_3 \\ &= a_0 + \frac{1}{2}\, a_1 + \frac{1}{3}\, a_2 + \frac{1}{4}\, a_3 \\ &= \int_0^1 P(t)\ dt \end{aligned}$$

On en déduit que la formule $I_2(\cdot)$ ainsi construite est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi cette formule de quadrature est au moins d'ordre 3.

$$\boxed{\text{On en déduit que la formule de quadrature } I_2(\cdot) \text{ n'est pas d'ordre 2.}}$$

Commentaire

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative.
À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :

- × « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
- × « Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? »
- × « La variable aléatoire X admet-elle une variance ? »
- × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
- × « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment). □

B - Construction de formules d'ordre quelconque

On revient au cas général.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans I, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$.

6. Montrer que l'application linéaire $\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration.

- Démontrons que φ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(Q_1, Q_2) \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^2$.

$$\begin{array}{cl} & \varphi(\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2) \\ = & \big((\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)(x_0), \dots, (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)(x_n)\big) \\ = & \big(\lambda_1 \, Q_1(x_0) + \lambda_2 \, Q_2(x_0), \dots, \lambda_1 \, Q_1(x_n) + \lambda_2 \, Q_2(x_n)\big) \qquad \textit{(par linéarité de l'évaluation en } x_0, \dots, \textit{ en } x_n\textit{)} \\ = & \lambda_1 \cdot \big(Q_1(x_0), \dots, Q_1(x_n)\big) + \lambda_2 \cdot \big(Q_2(x_0), \dots, Q_2(x_n)\big) \\ = & \lambda_1 \cdot \varphi(Q_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(Q_2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi \text{ est linéaire.}}$$

- Démontrons que φ est bijective.
  - $\times$ Démontrons que φ est injective.
    Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{array}{rcl} P \in \operatorname{Ker}(\varphi) & \Leftrightarrow & \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ & \Leftrightarrow & \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) = (0, \dots, 0) \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in [\![0, n]\!], \ P(x_i) = 0 \\ & \Leftrightarrow & P = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \textit{(comme } \deg(P) \leqslant n\textit{, le polynôme } P \textit{ admet plus de } n+1 \textit{ racines si et seulement si c'est le polynôme nul)} \end{array}$$

    On a démontré : $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \varphi \text{ est injective.}}$$

  - $\times$ On sait donc que :
    - l'application linéaire φ est injective,
    - $\dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$.

$$\boxed{\text{On en conclut que } \varphi \text{ est bijective.}}$$

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est linéaire et bijective. C'est donc un isomorphisme.}}$$

□

7. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

- Soit $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. On remarque tout d'abord :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \ L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_i(x_0) & = & 0 \\ & \vdots & \\ L_i(x_{i-1}) & = & 0 \\ L_i(x_i) & = & 1 \\ L_i(x_{i+1}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ L_i(x_n) & & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \big(L_i(x_0), \dots, L_i(x_{i-1}), L_i(x_i), L_i(x_{i+1}), \dots, L(x_n)\big) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(L_i) = e_{i+1}$$

où on note $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- On cherche donc un polynôme L_i qui est un antécédent de e_{i+1} par φ.
Or, d'après la question précédente, l'application φ est bijective. Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ admet un unique antécédent par φ. C'est en particulier le cas du vecteur $e_{i+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pour tout } i \in [\![0, n]\!], \text{ il existe donc un unique polynôme} \\ L_i \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que : } \forall j \in [\![0, n]\!], \ L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \end{array}}$$

□

8. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \dots, x_n)$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Supposons :

$$\lambda_0 \cdot L_0 + \dots + \lambda_n \cdot L_n \ = \ 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad (*)$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
On évalue l'égalité $(*)$ en x_i. On obtient :

$$\lambda_0 \, L_0(x_i) + \dots + \lambda_{i-1} \, L_{i-1}(x_i) + \lambda_i \, L_i(x_i) + \lambda_{i+1} \, L_{i+1}(x_i) + \dots + \lambda_n \, L_n(x_i) \ = \ 0$$

Par définition des polynômes L_0, ..., L_n en question précédente, on en déduit :

$$\lambda_0 \times 0 + \cdots + \lambda_{i-1} \times 0 + \lambda_i \times 1 + \lambda_{i+1} \times 0 + \cdots + \lambda_n \times 0 \ = \ 0$$

Ainsi : $\lambda_i = 0$. On a donc démontré : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n) \text{ est alors libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B}$ est donc :
  - × libre d'après ce qui précède,
  - × telle que : $\text{Card}(\mathscr{B}) = n + 1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

□

9. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_I x^k\, w(x)\, dx$ est bien définie. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j\, f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j \ = \ \int_I L_j(x)\, w(x)\, dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& \text{La formule } I_n(\cdot) \text{ est exacte sur } \mathbb{R}_n[X] \\
\Leftrightarrow \ & \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ e(P) = 0 \\
\Leftrightarrow \ & \forall i \in [\![0, n]\!],\ e(L_i) = 0 && \textit{(car } (L_0, \dots, L_n) \textit{ est une base de } \mathbb{R}_n[X] \textit{ et } e \textit{ est linéaire)} \\
\Leftrightarrow \ & \forall i \in [\![0, n]\!],\ \int_I L_i(x)\, w(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, L_i(x_j) && \textit{(par définition de } e\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & \forall i \in [\![0, n]\!],\ \int_I L_i(x)\, w(x)\, dx = \lambda_i\, L_i(x_i) + \cancel{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j\, L_i(x_j)} \\
\Leftrightarrow \ & \forall i \in [\![0, n]\!],\ \int_I L_i(x)\, w(x)\, dx = \lambda_i && \textit{(par définition de } L_i\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La formule de quadrature } I_n(\cdot) \text{ est donc exacte sur } \mathbb{R}_n[X] \\ \text{si et seulement si : } \forall j \in [\![0, n]\!],\ \displaystyle\int_I L_j(x)\, w(x)\, dx = \lambda_j.\end{array}}$$

□

10. On se place dans le cas $I = [0,1]$ et : $\forall x \in I,\ w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question ***5***.

Démonstration.

- D'après la question ***7.***, on cherche trois polynômes L_0, L_1 et L_2 de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_0(0) & = & 1 \\ L_0\left(\frac{1}{2}\right) & = & 0 \\ L_0(1) & = & 0 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} L_1(0) & = & 0 \\ L_1\left(\frac{1}{2}\right) & = & 1 \\ L_1(1) & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} L_2(0) & = & 0 \\ L_2\left(\frac{1}{2}\right) & = & 0 \\ L_2(1) & = & 1 \end{array}\right.$$

- Déterminons L_0.
  - × Tout d'abord L_0 est de degré au plus 2 ($L_0 \in \mathbb{R}_2[X]$) et ce polynôme admet 2 racines : $\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi il est exactement de degré 2 et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$L_0(X) \ = \ a\left(X - \frac{1}{2}\right)(X-1)$$

  - × Ensuite $L_0(0) = 1$. Ainsi :

$$1 \ = \ L_0(0) \ = \ a\left(0 - \frac{1}{2}\right)(0-1)$$

  Donc : $1 = \frac{1}{2}\, a$. D'où : $a = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } L_0(X) = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X-1).}$$

- Déterminons L_1. On procède comme pour L_0.
  - × Tout d'abord L_1 est de degré au plus 2 ($L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$) et ce polynôme admet 2 racines : 0 et 1. Ainsi il est exactement de degré 2 et il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$L_1(X) \ = \ b\,(X-0)\,(X-1)$$

  - × Ensuite $L_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Ainsi :

$$1 \ = \ L_1\left(\frac{1}{2}\right) \ = \ b\left(\frac{1}{2} - 0\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

  Donc : $1 = -\frac{1}{4}\, b$. D'où : $b = -4$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } L_1(X) = -4\,X\,(X-1).}$$

- Déterminons enfin L_2. On procède comme pour L_0 et L_1.
  - Tout d'abord L_2 est de degré au plus 2 ($L_0 \in \mathbb{R}_2[X]$) et ce polynôme admet 2 racines : 0 et $\dfrac{1}{2}$. Ainsi il est exactement de degré 2 et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$L_2(X) \ = \ c\,(X-0)\left(X-\frac{1}{2}\right)$$

  - Ensuite $L_2(1) = 1$. Ainsi :

$$1 \ = \ L_2(1) \ = \ c\,(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

  Donc : $1 = \dfrac{1}{2}\,c$. D'où : $c = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } L_2(X) = 2\,X\left(X-\frac{1}{2}\right).}$$

- D'après la question ***5.***, on cherche une formule de quadrature $I_2(f) = \lambda_0\,f(0) + \lambda_1\,f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \lambda_2\,f(1)$ exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$.
  De plus d'après la question ***9.***, pour que $I_2(\cdot)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$, il faut choisir :

$$\forall j \in [\![0,2]\!], \quad \lambda_j \ = \ \int_0^1 \ L_j(x) \times 1 \ dx$$

  On obtient :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \int_0^1 \ L_0(x)\ dx \\
&= \int_0^1 \ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\ dx \\
&= 2\int_0^1 \ x^2 - \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{2}\ dx \\
&= 2\ \left[\ \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ x\ \right]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{1}{6}}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int_0^1 L_1(x)\ dx \\
&= \int_0^1 -4\,x\,(x-1)\ dx \\
&= -4\int_0^1 x^2 - x\ dx \\
&= -4\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= -4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{2}{3}}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \int_0^1 L_2(x)\ dx \\
&= \int_0^1 2\,x\left(x - \frac{1}{2}\right)\ dx \\
&= 2\int_0^1 x^2 - \frac{1}{2}\,x\ dx \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{6}}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien les coefficients obtenus en question } \textbf{\textit{5.}}}$

□

C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

Dans cette sous-partie, on suppose que l'intervalle I est un segment : $I = [a, b]$, avec : $a < b$.
Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x, t) \; = \; \begin{cases} (x-t)^m & \text{si } x \geqslant t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}$$

On observe que $x \mapsto \varphi_m(x, t)$ et $t \mapsto \varphi_m(x, t)$ sont continues si $m \geqslant 1$ et discontinues si $m = 0$.
On considère une formule de quadrature $I_n(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j \, f(x_j)$.
On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) \; = \; \int_a^b f(x) \, w(x) \; dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, f(x_j)$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I.

11. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer $e(f) = e(R_m)$ où R_m est définie par :

$$\forall x \in [a, b], \quad R_m(x) \; = \; \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) \, f^{(m+1)}(t) \; dt$$

Démonstration.

- Explicitons tout d'abord R_m. Soit $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} & R_m(x) \\ = \; & \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) \, f^{(m+1)}(t) \; dt \\ = \; & \frac{1}{m!} \left(\int_a^x \varphi_m(x, t) \, f^{(m+1)}(t) \; dt + \int_x^b \varphi_m(x, t) \, f^{(m+1)}(t) \; dt \right) && \textit{(par relation de Chasles)} \\ = \; & \frac{1}{m!} \left(\int_a^x (x-t)^m \, f^{(m+1)}(t) \; dt + \cancel{\int_x^b 0 \times f^{(m+1)}(t) \; dt} \right) && \textit{(par définition de } \varphi_m\textit{)} \\ = \; & \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} \; f^{(m+1)}(t) \; dt \end{aligned}$$

  On reconnaît le reste intégral obtenu par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f en a.

- Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I, alors, par formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} f(x) \; & = \; \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \; (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} \; f^{(m+1)}(t) \; dt \\ & = \; \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \; (x-a)^k + R_m(x) \end{aligned}$$

  On note alors $S_m : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \; (x-a)^k$. Ainsi : $f = S_m + R_m$.

- Comme l'application e est linéaire (précisé par l'énoncé en début de problème), on en déduit :

$$e(f) = e(S_m + R_m) = e(S_m) + e(R_m)$$

Il s'agit donc de démontrer : $e(S_m) = 0$.

× On sait, d'après l'énoncé que m est l'ordre de la formule $I_n(\cdot)$. En particulier, $I_n(\cdot)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

× Comme $S_m(X) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$, alors : $S_m \in \mathbb{R}_m[X]$.

On en déduit : $e(S_m) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } e(f) = e(R_m).}$$

□

12. En déduire, si $m \geqslant 1$:

$$e(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t)\, f^{(m+1)}(t)\, dt$$

où la fonction $K_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \quad K_m(t) = e\big(x \mapsto \varphi_m(x, t)\big) = \int_a^b \varphi_m(x, t)\, w(x)\, dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, \varphi_m(x_j, t)$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x, t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_a^b g(x, t)\, dx \right) dt$$

La fonction K_m est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature.*
On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

Démonstration.
Soit $m \geqslant 1$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} e(f) &= e(R_m) \\ &= \int_a^b R_m(x)\, w(x)\, dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, R_m(x_j) \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t)\, f^{(m+1)}(t)\, dt \right) w(x)\, dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left(\frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x_j, t)\, f^{(m+1)}(t)\, dt \right) \end{aligned}$$

- Étudions le premier terme de cette différence.

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t)\, f^{(m+1)}(t)\, dt \right) w(x)\, dx \\ = {} & \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x, t)\, f^{(m+1)}(t)\, dt \right) w(x)\, dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale (celle en } x\textit{))} \\ = {} & \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x, t)\, f^{(m+1)}(t)\, w(x)\, dt \right) dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale (celle en } t\textit{))} \end{aligned}$$

Or la fonction suivante est continue sur $[a,b]^2$:

$$(x,t) \mapsto \varphi_m(x,t)\, f^{(m+1)}(t)\, w(x)$$

Ainsi, d'après le résultat admis par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)\, f^{(m+1)}(t)\, w(x)\ dt \right)\ dx \\
= \ & \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)\, f^{(m+1)}(t)\, w(x)\ dx \right)\ dt \\
= \ & \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)\, w(x)\ dx \right) f^{(m+1)}(t)\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale (celle en } x\textit{))}
\end{aligned}$$

- Étudions le second terme de cette différence.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left(\frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x_j,t)\, f^{(m+1)}(t)\ dt \right) \\
= \ & \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left(\int_a^b \varphi_m(x_j,t)\, f^{(m+1)}(t)\ dt \right) \qquad \textit{(par linéarité de } \sum \textit{)} \\
= \ & \frac{1}{m!} \int_a^b \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, \varphi_m(x_j,t)\, f^{(m+1)}(t)\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& e(f) \\
= \ & \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t)\, w(x)\ dx \right) f^{(m+1)}(t)\ dt + \frac{1}{m!} \int_a^b \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, \varphi_m(x_j,t)\, f^{(m+1)}(t)\ dt \\
= \ & \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\left(\int_a^b \varphi_m(x,t)\, w(x)\ dx \right) f^{(m+1)}(t) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, \varphi_m(x_j,t)\, f^{(m+1)}(t) \right)\ dt \\
= \ & \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\left(\int_a^b \varphi_m(x,t)\, w(x)\ dx \right) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, \varphi_m(x_j,t) \right) f^{(m+1)}(t)\ dt \\
= \ & \frac{1}{m!} \int_a^n K_m(t)\, f^{(m+1)}(t)\ dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } m \geqslant 1 : e(f) = \int_a^b K_m(t)\, f^{(m+1)}(t)\ dt.}$$

□

D - Exemple : méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on suppose que I est un segment et : $\forall x \in I,\ w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0, 1]$ et on considère la formule de quadrature :

$$I_1(g) \ = \ \frac{g(0) + g(1)}{2}$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

13. Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$\big|e(g)\big| \ \leqslant \ \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} \big|g''(x)\big|$$

Démonstration.

- Tout d'abord, on remarque :
$$I_1(g) \ = \ \sum_{j=0}^{1} \lambda_j g(x_j)$$
où $\lambda_0 = \lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$
- Soit $t \in [0, 1]$.
$$\begin{aligned} & K_1(t) \\ = \ & \int_0^1 \varphi_1(x, t)\, w(x)\ dx - \sum_{j=0}^{1} \lambda_j\, \varphi_1(x_j, t) \\ = \ & \int_0^1 \varphi_1(x, t) \times 1\ dx - \left(\frac{1}{2}\ \varphi_1(0, t) + \frac{1}{2}\ \varphi_1(1, t)\right) \end{aligned}$$
- Or, par définition de φ_1 :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x, t) \ = \ \begin{cases} (x - t)^1 & \text{si } x \geqslant t \\ \quad 0 & \text{si } x < t \end{cases}$$
De plus : $t \in [0, 1]$. Donc :
  - × tout d'abord : $\varphi_1(0, t) = 0$ (car $t \geqslant 0 = x$)
  - × ensuite : $\varphi_1(1, t) = 1 - t$ (car $t \leqslant 1 = x$)
  - × enfin :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_1(x, t)\ dx \ &= \ \cancel{\int_0^t \varphi_1(x, t)\ dx} + \int_t^1 \varphi_1(x, t)\ dx && \textit{(par relation de Chasles)} \\ &= \ 0 + \int_t^1 (x - t)\ dx && \textit{(par définition de } \varphi_1\textit{)} \\ &= \ \left[\ \frac{(x - t)^2}{2}\ \right]_t^1 \\ &= \ \frac{(1 - t)^2}{2} - 0 \end{aligned}$$

- On obtient :

$$K_1(t) \;=\; \frac{(1-t)^2}{2} - \left(\cancel{\frac{1}{2} \times 0} + \frac{1}{2} \times (1-t)\right) \;=\; \frac{(1-t)^2}{2} - \frac{1}{2}\,(1-t) \;=\; \frac{1-t}{2}\,\big((\cancel{1}-t) - \cancel{1}\big)$$

$$\boxed{K_1 : t \mapsto -\frac{(1-t)\,t}{2} = \frac{t\,(t-1)}{2}}$$

- Soit $g \in \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.
Comme $I_1(\cdot)$ est une formule de quadrature d'ordre $1 \geqslant 1$, on peut lui appliquer la question ***12.*** On obtient :

$$\begin{aligned} e(g) &= \frac{1}{1!}\int_0^1 K_1(t)\, g^{(1+1)}(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{t\,(t-1)}{2}\, g''(t)\, dt \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \big|e(g)\big| &= \left|\int_0^1 \frac{t\,(t-1)}{2}\, g''(t)\, dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\, g''(t)\right|\, dt \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &= \int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\right| \big|g''(t)\big|\, dt \end{aligned}$$

- Or :
  - × d'une part, pour tout $t \in [0,1]$, par définition de la borne supérieure :

$$\big|g''(t)\big| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \big|g''(t)\big|$$

Notons de plus que $\sup\limits_{x\in[0,1]} \big|g''(x)\big|$ est bien défini car la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Ainsi, la fonction g'' est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. D'où l'existence de la borne supérieure.
On en déduit :

$$\begin{aligned} \big|e(g)\big| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\right| \big|g''(t)\big|\, dt \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\right| \times \sup_{t\in[0,1]} \big|g''(t)\big|\, dt \qquad (*) \\ &= \int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\right|\, dt \times \sup_{t\in[0,1]} \big|g''(t)\big| \end{aligned}$$

Commentaire

Détaillons la majoration $(*)$. Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rrcl} & \left|g''(t)\right| & \leqslant & \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|g''(t)\right| \\ \text{donc} & \left|\dfrac{t\,(t-1)}{2}\right| \left|g''(t)\right| & \leqslant & \left|\dfrac{t\,(t-1)}{2}\right| \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|g''(t)\right| \qquad \textit{(car } \left|\dfrac{t\,(t-1)}{2}\right| \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\right| \left|g''(t)\right| \, dt \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\right| \sup_{t\in[0,1]} \left|g''(t)\right| \, dt$$

× d'autre part, pour tout $t \in [0,1]$: $\dfrac{t\,(t-1)}{2} \leqslant 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|\frac{t\,(t-1)}{2}\right| \, dt &= \int_0^1 -\frac{t\,(t-1)}{2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t - t^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \left|e(g)\right| \leqslant \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} \left|g''(t)\right|.}$$

□

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a,b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n+1$ points a_0, …, a_n équidistants :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad a_i = a + i\,h$$

où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.
On considère alors la formule de quadrature :

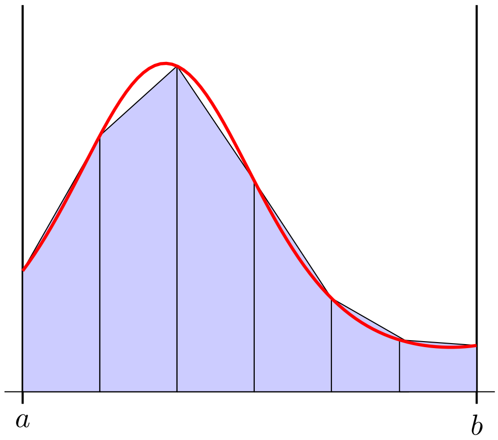
$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$$

appelée *méthode des trapèzes*. L'erreur de quadrature associée est notée :

$$e_n(f) = \int_a^b f(x) \, dx - T_n(f)$$

14. Représenter graphiquement $T_n(f)$.

Démonstration.



$T_n(f)$ est la valeur de l'aire

□

15. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer :

$$e_n(f) \;=\; \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i)$$

où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question ***13*** et les $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.

Démonstration.

- Par définition de $e(f)$:

$$\begin{aligned} & e_n(f) \\ = \;& \int_a^b f(t)\, dt - T_n(f) \\ = \;& \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \\ = \;& \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\, dt - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\, \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right) \qquad \textit{(par relation de Chasles)} \end{aligned}$$

- On remarque :

$$\frac{b-a}{n} \;=\; h \;=\; a_{i+1} - a_i \;=\; \int_{a_i}^{a_{i+1}} 1\, dt$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} e_n(f) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\ dt - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\ \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\ dt - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} 1\ dt\ \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\ dt - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\ dt \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\ dt - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\ dt \right) \qquad \textit{(par linéarité de } \textstyle\sum \textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\ dt \right) \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{array}$$

- Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.
  On effectue le changement de variable permettant d'obtenir une intégrale sur le segment $[0,1]$: $\boxed{t = x\, a_{i+1} + (1-x)\, a_i}$.

$$\left| \begin{array}{l} t = x\, a_{i+1} + (1-x)\, a_i \\ \hookrightarrow dt = (a_{i+1} - a_i)\ dx = \dfrac{b-a}{n}\ dx \\ \bullet\ t = a_i \ \Rightarrow\ x = 0 \\ \bullet\ t = a_{i+1} \ \Rightarrow\ x = \pi \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(f(t) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right)\ dt \\ = & \displaystyle\int_0^1 \left(f\big(x\, a_{i+1} + (1-x)\, a_i\big) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right) \times \frac{b-a}{n}\ dx \\ = & \displaystyle\frac{b-a}{n} \int_0^1 \left(f\big(x\, a_{i+1} + (1-x)\, a_i\big) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right)\ dx \end{array}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} e_n(f) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \int_0^1 \left(f\big(x\, a_{i+1} + (1-x)\, a_i\big) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right)\ dx \right) \\ & = & \displaystyle\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_0^1 \left(f\big(x\, a_{i+1} + (1-x)\, a_i\big) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right)\ dx \right) \end{array}$$

- Or on souhaite : $e_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} e(g_i)$. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on doit donc choisir g_i tel que :

$$e(g_i) \ = \ \int_0^1 \left(f\big(x\, a_{i+1} + (1-x)\, a_i\big) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right)\ dx$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la question ***13.*** :

$$e(g_i) \ = \ \int_0^1 g_i(t)\ dt - \frac{g_i(0)+g_i(1)}{2}$$

Ainsi, on souhaite :

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_i(t)\ dt - \frac{g_i(0)+g_i(1)}{2} &= \int_0^1 \left(f\big(t\, a_{i+1} + (1-t)\, a_i\big) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \right)\ dt \\ &= \int_0^1 f\big(t\, a_{i+1} + (1-t)\, a_i\big)\ dt - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \end{aligned}$$

On choisit alors :

$$g_i : t \mapsto f\big(t\, a_{i+1} + (1-t)\, a_i\big)$$

$$\boxed{\text{Avec cette notation, on obtient : } e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i).}$$

□

16. En déduire la majoration d'erreur :

$$\big|e_n(f)\big| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\, n^2} \sup_{x \in [a,b]} \big|f''(x)\big|$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \big|e_n(f)\big| &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i) \right| \\ &= \frac{b-a}{n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i) \right| \qquad \textit{(car : } \frac{b-a}{n} \geqslant 0\textit{)} \\ &\leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big|e(g_i)\big| \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

- Or, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, d'après la question ***13.*** :

$$\big|e(g_i)\big| \leqslant \frac{1}{12} \sup_{x \in [0,1]} \big|g_i''(x)\big|$$

On rappelle, pour tout $t \in [0,1]$:

$$g_i(t) = f\big(t\, a_{i+1} + (1-t)\, a_i\big) = f\big((a_{i+1}-a_i)\, t + a_i\big)$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, alors la fonction g_i est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur des intervalles adéquats.
Pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} g_i'(t) &= (a_{i+1}-a_i)\, f'\big((a_{i+1}-a_i)\, t + a_i\big) \\ g_i''(t) &= (a_{i+1}-a_i)^2\, f''\big((a_{i+1}-a_i)\, t + a_i\big) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''\big((a_{i+1}-a_i)\, t + a_i\big) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} \left|g_i''(t)\right| &= \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{(b-a)^2}{n^2}\, f''\big((a_{i+1}-a_i)\,t+a_i\big)\right| \\
&= \frac{(b-a)^2}{n^2} \sup_{t\in[0,1]} \left|f''\big((a_{i+1}-a_i)\,t+a_i\big)\right| \\
&= \frac{(b-a)^2}{n^2} \sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} \left|f''(x)\right| \\
&\leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right| \qquad \textit{(car : } [a_i,a_{i+1}]\subset[a,b]\textit{)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left|e(g_i)\right| \leqslant \frac{1}{12} \sup_{t\in[0,1]} \left|g_i''(t)\right| \leqslant \frac{1}{12}\times\frac{(b-a)^2}{n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$$

- On reprend la majoration de $\left|e_n(f)\right|$.

$$\begin{aligned}
\left|e_n(f)\right| &\leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left|e(g_i)\right| \\
&\leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(b-a)^2}{12\,n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|\right) \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \\
&= \frac{b-a}{\cancel{n}}\, \cancel{n} \times \left(\frac{(b-a)^2}{12\,n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|\right) \\
&= \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left|e_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|}$$

□

Problème II

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de la matrice M.
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k : $M^{k+1} = M\,M^k$.
De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout entier naturel k : $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que : $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que : $M^k = 0$, est appelé *indice de nilpotence* de M.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si l'entier $p \geqslant 1$ est le plus petit entier naturel k tel que : $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On pose : $J_1 = (0)$ et, pour tout $\alpha \in [\![2, +\infty[\![$: $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C})$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, …, $A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note :

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C})$$

A - Nilpotence d'indice 1

17. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

18. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que : $u^{p-1}(x) \neq 0$.

19. Vérifier que la famille $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire : $p = 2$.

20. Démontrer : $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

21. Construire une base (e_1, e_2) de E telle que : $u(e_1) = e_2$ et $u(e_2) = 0_E$.

C - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotente d'indice 2 et de rang r.

22. Démontrer : $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et $2r \leqslant n$.

23. On suppose : $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, …, e_r de E tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

24. Déterminer les images par u des vecteurs de la base définie en question ***23***.

25. On suppose : $\operatorname{Im}(u) \neq \operatorname{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, …, e_r de E et des vecteurs v_1, v_2, …, v_{n-2r} appartenant à $\operatorname{Ker}(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

26. Déterminer les images par u des vecteurs de la base définie en question ***25***.