DS7

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` l'exercice de cours. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice : Cours

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n et d'une pièce équilibrée. On commence par piocher un jeton au hasard dans l'urne. Si le jeton obtenu est le jeton numéro k, alors on lance k fois la pièce.
Pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, on note :

$$J_k \text{ : « obtenir le jeton numéro } k \text{ »}$$

$$A_i \text{ : « obtenir exactement } i \text{ Pile au cours de l'expérience »}$$

1. Soit $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$.

a) Supposons : $i \leqslant k$. Démontrer : $\mathbb{P}(A_i \mid J_k) = \binom{k}{i} \dfrac{1}{2^k}$.

b) Que vaut $\mathbb{P}(A_i \mid J_k)$ dans le cas où $i > k$? Justifier.

2. Démontrer alors : $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=i}^{n} \binom{k}{i} \dfrac{1}{2^k}$.

Problème I

Dans tout ce sujet, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et w est une fonction continue et strictement positive de I dans $\mathbb{R}$; on dit que w est *un poids* sur I.
Étant donnée une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que l'intégrale de fw sur I est bien définie, on cherche à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)\, w(x)\, dx$ par une expression de la forme :

$$I_n(f) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, f(x_j)$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans I.
Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note :

$$e(f) \;=\; \int_I f(x)\, w(x)\, dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que e est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale de fw sur I est bien définie.
On rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* si son coefficient dominant est 1.
Étant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si :

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X],\ e(P) = 0$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m :

$$\int_I P(x)\, w(x)\, dx \;=\; \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, P(x_j)$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

A - Exemples élémentaires

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas $I = [0,1]$ et : $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée à $e(f)$.

4. Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5. Déterminer les coefficients λ_0, λ_1, λ_2 pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0\,f(0) + \lambda_1\,f\left(\dfrac{1}{2}\right) + \lambda_2\,f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

B - Construction de formules d'ordre quelconque

On revient au cas général.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans I, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$.

6. Montrer que l'application linéaire $\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$ est un isomorphisme.

7. Montrer que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad L_i(x_j) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

8. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \ldots, x_n)$.

9. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_I x^k\,w(x)\,dx$ est bien définie. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j\,f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si :

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_j \ = \ \int_I L_j(x)\,w(x)\,dx$$

10. On se place dans le cas $I = [0,1]$ et : $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question ***5***.

C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

Dans cette sous-partie, on suppose que l'intervalle I est un segment : $I = [a, b]$, avec : $a < b$.
Pour tout entier naturel m, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_m(x,t) \;=\; \begin{cases} (x-t)^m & \text{si } x \geqslant t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}$$

On observe que $x \mapsto \varphi_m(x,t)$ et $t \mapsto \varphi_m(x,t)$ sont continues si $m \geqslant 1$ et discontinues si $m = 0$.
On considère une formule de quadrature $I_n(f) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j \, f(x_j)$.
On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) \;=\; \int_a^b f(x)\, w(x)\; dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, f(x_j)$$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur I.

11. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer $e(f) = e(R_m)$ où R_m est définie par :

$$\forall x \in [a,b], \quad R_m(x) \;=\; \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x,t)\, f^{(m+1)}(t)\; dt$$

12. En déduire, si $m \geqslant 1$:

$$e(f) \;=\; \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t)\, f^{(m+1)}(t)\; dt$$

où la fonction $K_m : [a,b] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall t \in [a,b], \quad K_m(t) \;=\; e\big(x \mapsto \varphi_m(x,t)\big) \;=\; \int_a^b \varphi_m(x,t)\, w(x)\; dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, \varphi_m(x_j, t)$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)\; dt \right) dx \;=\; \int_a^b \left(\int_a^b g(x,t)\; dx \right) dt$$

La fonction K_m est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature.*
On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

D - Exemple : méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on suppose que I est un segment et : $\forall x \in I$, $w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0,1]$ et on considère la formule de quadrature :

$$I_1(g) \;=\; \frac{g(0) + g(1)}{2}$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

13. Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$\big|e(g)\big| \;\leqslant\; \frac{1}{12} \sup_{x \in [0,1]} \big|g''(x)\big|$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a, b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n+1$ points a_0, …, a_n équidistants :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad a_i \ = \ a + i\,h$$

où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.
On considère alors la formule de quadrature :

$$T_n(f) \ = \ \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$$

appelée *méthode des trapèzes*. L'erreur de quadrature associée est notée :

$$e_n(f) \ = \ \int_a^b f(x)\, dx - T_n(f)$$

14. Représenter graphiquement $T_n(f)$.

15. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer :

$$e_n(f) \ = \ \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i)$$

où e est l'erreur associée à la formule de quadrature I_1 étudiée à la question ***13*** et les $g_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.

16. En déduire la majoration d'erreur :

$$\left| e_n(f) \right| \ \leqslant \ \frac{(b-a)^3}{12\, n^2} \sup_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|$$

Problème II

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de la matrice M.
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k : $M^{k+1} = M\, M^k$.
De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout entier naturel k : $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que : $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que : $M^k = 0$, est appelé *indice de nilpotence* de M.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si l'entier $p \geqslant 1$ est le plus petit entier naturel k tel que : $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On pose : $J_1 = (0)$ et, pour tout $\alpha \in [\![2, +\infty[\![$: $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{diag}(A, B) \ = \ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C})$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, …, $A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note :

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) \;=\; \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C})$$

A - Nilpotence d'indice 1

17. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

18. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que : $u^{p-1}(x) \neq 0$.

19. Vérifier que la famille $\big(u^k(x)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire : $p = 2$.

20. Démontrer : $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

21. Construire une base (e_1, e_2) de E telle que : $u(e_1) = e_2$ et $u(e_2) = 0_E$.

C - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotente d'indice 2 et de rang r.

22. Démontrer : $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et $2r \leqslant n$.

23. On suppose : $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, …, e_r de E tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

24. Déterminer les images par u des vecteurs de la base définie en question ***23***.

25. On suppose : $\operatorname{Im}(u) \neq \operatorname{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, …, e_r de E et des vecteurs v_1, v_2, …, v_{n-2r} appartenant à $\operatorname{Ker}(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

26. Déterminer les images par u des vecteurs de la base définie en question ***25***.