DS6 /104

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 1. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /8

1. (*) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' + y \; = \; \cos(x)$$

- **1 pt : L'ensemble des solutions de (H) est : $\{x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.**
- **1 pt : La fonction $h : x \mapsto a\, x\, \mathrm{e}^{ix}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $h' : x \mapsto a\,(1 + ix)\,\mathrm{e}^{ix}$ et $h'' : x \mapsto a\,(2i - x)\,\mathrm{e}^{ix}$**
- **2 pts : h solution de $(E') \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}\, i$**
  - × **1 pt : comme $|\mathrm{e}^{ix}| = 1$, alors : $\mathrm{e}^{ix} \neq 0$**
  - × **1 pt : reste**
- **1 pt : $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\, i\, x\, \mathrm{e}^{ix}$ est une solution particulière de (E')**
- **1 pt : $\mathrm{Re}\,(g) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\, x \sin(x)$**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de (E) est : $\{x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \dfrac{1}{2}\, x \sin(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$**

Exercice 2 /25

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note : $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A + 2\,I)^2$.

- **1 pt : $(A + 2\,I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$**

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt : $(A + 2\,I)^2 = A^2 + 4\,A + I$ car A et I commutent**
- **1 pt : $A^{-1} = -\dfrac{1}{4} \cdot A - I$**

2. On note : $E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
Déterminer $E_{-2}(A)$.

- **1 pt : écriture système** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ -2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$
- **1 pt : résolution système** $\left\{ z \; = \; -2x + y \right.$

- **1 pt :** $E_{-2}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

3. On note $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\\-2 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- **1 pt : étape de calcul** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
- **1 pt : justification inversibilité**
- **1 pt :** $P^{-1} = \begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\2 & 0 & 1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\0 & -2 & -1\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\0 & -2 & 1\\4 & 2 & 3\end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \begin{pmatrix}8 & -3 & 5\\-6 & 1 & -3\\-4 & 2 & -2\end{pmatrix}$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -2I + N$.

- **1 pt :** $N = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- **1 pt :** $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt : reste (récurrence ou** $N^k = N^{k-2} \times N^2$**)**

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

- **1 pt :** $-2\,I$ **et** N **commutent**
- **1 pt : découpage valable car** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2$**,** $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $I^{n-k} = I$
- **1 pt :** $T^n = (-2)^{n-1}(-2\,I + n\,N)$
- **1 pt : cas** $n = 0$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

- **1 pt :** $T^n = (-2)^{n-1}\big(2(n-1)\,I + n\,T\big)$

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-2)^{n-1}\big(2\,(n-1)\,I + n\,A\big)$.

- **1 pt :** $A^n = (-2)^{n-1}\big(2(n-1)\,I + n\,A\big)$

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

- **1 pt**

Exercice 3 /33

On note I l'intervalle $[0, 1]$. Soient f et g deux fonctions continues sur I, **à valeurs dans** I.
On supposera dans tout le problème que f et g commutent, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad (f \circ g)(x) \ = \ (g \circ f)(x)$$

Le but de ce problème est de répondre à la question suivante :

(Q) : « f et g possèdent-elles un point fixe en commun dans I ? »

Dans tout le problème, on notera $h : x \mapsto f(x) - x$.

Partie I - Ensemble des points fixes

1. Montrer que la fonction f possède au moins un point fixe dans I.

- **1 pt :** $h(0) \geqslant 0$ **et** $h(1) \leqslant 0$
- **1 pt : continuité de** f **sur** $I = [0, 1]$

Pour les mêmes raisons, la fonction g possède également au moins un point fixe dans I.
On note F (resp. G) l'ensemble des points fixes de f (resp. de g) dans I.

2. Montrer que G est stable par f, c'est-à-dire : $\forall x \in G$, alors $f(x) \in G$.
On montrerait de même, et on l'admettra ici, que F est stable par g.

- **1 pt : commutativité de** f **et** g
- **1 pt : utilisation de** $x \in G$

3. Montrer que F possède une borne inférieure m et une borne supérieure M.

- **1 pt : l'ensemble** F **est non vide d'après la question précédente**
- **1 pt :** F **minorée par** 0 **car** $F \subset [0, 1]$
- **1 pt : l'ensemble** F **est non vide et majorée par** 0

4. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure :

$$m \ = \ \inf(F) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

- **1 pt**

5. En déduire qu'il existe une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de F telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell_n - m \leqslant \dfrac{1}{n}$.

- **1 pt : on applique la question précédente à** $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$

6. En déduire : $\ell_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} m$. Puis : $m \in F$.
On montrerait de même, et on l'admettra ici, que $M \in F$.

- **1 pt : comme** $m = \inf(F)$**, alors** $0 \leqslant \ell_n - m \leqslant \dfrac{1}{n}$
- **1 pt : par théorème d'encadrement** $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = m$
- **1 pt :** $m \in [0, 1]$
- **1 pt : par continuité de** f **en** m**,** $f(m) = m$ **et donc** $m \in F$

Partie II - Une condition suffisante : la stricte décroissance de f sur I

On suppose, **uniquement dans cette partie**, que la fonction f, en plus d'être continue sur I, est strictement décroissante sur I.

7. Montrer qu'il existe un unique élément $\ell \in F$.

- **1 pt : h strictement décroissante sur I (attention, h n'est pas dérivable sur I)**
- **1 pt : hypothèses théorème de la bijection**
- **1 pt :** $h(I) = \big[h(1), h(0)\big]$
- **1 pt :** $0 \in \big[h(1), h(0)\big]$

8. Démontrer : $g(\ell) \in F$.

- **1 pt : F stable par g donc $g(\ell) \in F$ (car $\ell \in F$)**

9. Déduire des deux questions précédentes : $\ell \in G$.

- **1 pt :** $g(\ell) \in F = \{\ell\}$

10. Conclure quant à la question (Q) dans ce cas.

- **1 pt**

Partie III - Une condition suffisante (bis) : la stricte croissance de f sur I

On suppose, **uniquement dans cette partie**, que la fonction f, en plus d'être continue sur I, est strictement croissante sur I. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in G \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

11. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in G$.

- **1 pt : initialisation (existence assurée en qst *1.*)**
- **2 pts : hérédité (dont 1 pt pour stabilité de G par f d'après *2.*)**

12. On suppose : $x_1 \geqslant x_0$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geqslant x_n$. Que se passe-t-il si $x_1 \leqslant x_0$?

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
- **1 pt : si $x_1 \leqslant x_0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leqslant x_n$**

13. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\hat{\ell}$ et : $\hat{\ell} \in F$.

- **1 pt : (x_n) monotone**
- **1 pt : (x_n) bornée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in G \subset [0, 1]$**
- **1 pt : (x_n) converge vers $\hat{\ell}$ avec $0 \leqslant \hat{\ell} \leqslant 1$**
- **1 pt : continuité de f en $\hat{\ell}$ pour démontrer $\hat{\ell} \in F$**

14. Démontrer : $\hat{\ell} \in G$.

- **1 pt : continuité de g en $\hat{\ell}$ car $x_n \in G$**

15. Conclure quant à la question (Q) dans ce cas.

- **1 pt**

Exercice 4 /38

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On note $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des complexes ω vérifiant : $\omega^n = 1$.
- On dit qu'un complexe ω est une racine **primitive** $n^{\text{ème}}$ de l'unité si :
  1) $\omega^n = 1$,
  2) $\forall q \in [\![1, n-1]\!]$, $\omega^q \neq 1$.
  En d'autres termes, une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité pour laquelle n est la plus petite puissance q (non nulle) telle que : $\omega^q = 1$.
- On note P_n l'ensemble des racines primitives $n^{\text{ème}}$ de l'unité.
- On admet enfin le résultat suivant.

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, \quad \left. \begin{array}{c} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a \mid c)$$

Partie I - Caractérisation des racines primitives $n^{\text{ème}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Expliciter sans démonstration les ensembles P_1, P_2, P_3 et P_4.

- **1 pt :** $P_1 = \{1\}$
- **1 pt :** $P_2 = \{-1\}$
- **1 pt :** $P_3 = \{j, j^2\}$
- **1 pt :** $P_4 = \{i, -i\}$

2. *a)* Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que : $k \wedge n \neq 1$. Démontrer : $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \notin P_n$.

- **1 pt :** $d = k \wedge n \in [\![2, n-1]\!]$
- **1 pt :** $n = dq$ **où** $q \in [\![2, n-1]\!]$
- **1 pt :** $\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^q = 1$ **car** $p \in \mathbb{Z}$

b) Réciproquement, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que : $k \wedge n = 1$. En raisonnant par l'absurde, justifier : $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

- **1 pt :** $\left(\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n \neq 1$ **absurde !**
- **1 pt : sinon** $\dfrac{2kq\pi}{n} \equiv 0 \ [2\pi]$
- **1 pt :** $n \mid kq$ **et** $n \wedge k = 1$ **donc** $n \mid q$**. Absurde !**

On a donc prouvé :

$$P_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!], \ k \wedge n = 1 \right\}$$

En particulier, $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ est une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Soient z_1 et z_2 deux racines primitives $n^{\text{ème}}$. On admet qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \wedge n \ = \ 1 \\ {z_1}^u = z_2 \end{array} \right.$$

Partie II - Définition et premières propriétés des polynômes cyclotomiques

Dans la suite de ce problème, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique par :

$$\Phi_n \;=\; \prod_{\omega \in P_n} (X - \omega) \;=\; \prod_{\substack{k\,=\,0 \\ k \wedge n\,=\,1}}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.

- **1 pt :** $X^n - 1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$

4. Écrire sous forme développée Φ_2, Φ_3, Φ_4.
Vérifier en particulier que ces polynômes sont à coefficients entiers.

- **1 pt :** $\Phi_2(X) = X + 1$
- **1 pt :** $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$
- **1 pt :** $\Phi_4(X) = X^2 + 1$

5. ***a)*** Justifier : $\Phi_5(X) = \dfrac{X^5 - 1}{X - 1}$.

- **1 pt :** $\dfrac{X^5 - 1}{X - 1} = \prod\limits_{k=1}^{4} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{5}})$
- **1 pt :** $\prod\limits_{k=1}^{4} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}) = \Phi_5(X)$

b) En déduire une forme développée de Φ_5.

- **1 pt :** $\Phi_5(X) = \sum\limits_{k=0}^{4} X^k$

c) Plus généralement, si $p \in [\![2, +\infty[\![$ est un nombre premier, calculer Φ_p (on exprimera Φ_p sous forme de somme).

- **1 pt :** $\Phi_p(X) \;=\; \prod\limits_{k=1}^{p-1} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{p}})$
- **1 pt :** $\Phi_p(X) = \dfrac{X^p - 1}{X - 1} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} X^k$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Si d est un diviseur (positif) de n, on note :

$$E_d \;=\; \{k \in [\![0, n-1]\!] \mid k \wedge n = d\}$$

Justifier : $[\![0, n-1]\!] = \bigcup\limits_{\substack{d\,=\,1 \\ d \mid n}}^{n} E_d$.

- **2 pts : 1 pt par inclusion**

b) Soit d un diviseur de n. On note :

$$F_d \;=\; \left\{k \in [\![0, \tfrac{n}{d} - 1]\!] \mid k \wedge \tfrac{n}{d} = 1\right\}$$

Justifier que E_d et F_d sont en bijection.

- **2 pts :** $\begin{array}{rccc} f & : & E_d & \to & F_d \\ & & k & \mapsto & \dfrac{k}{d} \end{array}$ **bien définie**
  - × **1 pt :** $f(k) \in [\![0, n-1]\!]$
  - × **1 pt :** $f(k) \wedge \frac{n}{d} = 1$
- **1 pt :** f **injective**
- **1 pt :** f **surjective**

c) Démontrer :

$$\prod_{k \in E_d} (X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) \;=\; \Phi_{\frac{n}{d}}(X)$$

- **1 pt : changement d'indice** $p = \dfrac{k}{d}$**,** $\displaystyle\prod_{k \in E_d} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) = \prod_{p \in F_d} (X - \mathbf{e}^{\frac{2i\, dp\, \pi}{n}})$
- **1 pt :** $\displaystyle\prod_{k \in E_d} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) = \Phi_{\frac{n}{d}}(X)$

d) En déduire :

$$X^n - 1 \;=\; \prod_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n} \Phi_d(X)$$

- **1 pt :** $\displaystyle X^n - 1 = \prod_{k \in A_n} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$ **(d'après *6.a)*, en notant :** $\displaystyle A_n = \bigcup_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n} E_d$**)**
- **1 pt :** $\displaystyle X^n - 1 = \prod_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n} \Big(\prod_{k \in E_d} (X - \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) \Big)$ **(par produit par paquets)**
- **1 pt :** $\displaystyle X^n - 1 = \prod_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n} \Phi_{\frac{n}{d}}(X)$
- **1 pt : changement d'indice** $p = \dfrac{n}{d}$ **pour conclure**

7. Le but de cette question est de montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Démontrer l'initialisation.

- **1 pt :** $\Phi_1(X) = X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Supposons : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$. On cherche à démontrer $\mathscr{P}(n)$.

a) Énoncer (sans démonstration) le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$.

- **1 pt**

b) On admet que le théorème de division euclidienne est encore valable sur $\mathbb{Z}[X]$ si le polynôme diviseur est unitaire. Comparer la division euclidienne de $X^n - 1$ par :

$$B \ = \ \prod_{\substack{d=1 \\ d \mid n}}^{n-1} \Phi_d$$

avec la question ***6.d)***, et conclure.
(On justifiera bien qu'on peut appliquer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$, et on précisera bien où on utilise l'hypothèse de récurrence)

- **1 pt :** B **unitaire**
- **1 pt : par hypothèse de récurrence (forte),** $B \in Z[X]$
- **1 pt :** $X^n - 1 = B(X) \times \Phi_n(X)$
- **1 pt :** Φ_n **et** Q **sont le quotient de la division euclidienne de** A **par** B **dans** $\mathbb{C}[X]$ **donc** $\Phi_n = Q$
- **1 pt :** $\Phi_n = Q \in \mathbb{Z}[X]$**. D'où** $\mathscr{P}(n)$