PCSI
Mathématiques

3 février 2024

DS5

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2\,t & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2\,x & - & y & - & z & & & = & 0 \end{array}\right.$

Démonstration.
Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2\,t & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2\,x & - & y & - & z & & & = & 0 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2\,L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2\,t & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & + & 3\,t & = & 0 \\ & - & 3\,y & & & + & 3\,t & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & 3\,z & + & 4\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2\,t & = & 0 \\ & - & 3\,y & & & + & 3\,t & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & + & 3\,t & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & 3\,z & + & 4\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2\,t & = & 0 \\ & - & 3\,y & & & + & 3\,t & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & + & 3\,t & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2\,t & = & 0 \\ & - & 3\,y & & & + & 3\,t & = & 0 \\ & & & - & 3\,z & + & 3\,t & = & 0 \\ & & & & & - & 2\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\ x = y = z = t = 0\right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système initial est donc } \{0_{\mathbb{R}^4}\}.}$$

□

2. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note (c_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Démontrer : $c_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} |c_n - \ell| & = & \left| \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k - \ell \right| \\ & = & \left| \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k - n\,\ell \right) \right| \\ & = & \dfrac{1}{n} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} u_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \ell \right| \\ & = & \dfrac{1}{n} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k - \ell) \right| \\ & \leqslant & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \end{array}$$

- De plus, comme la suite (u_n) converge vers ℓ, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \geqslant n_1, \ |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Soit $n \geqslant n_1$.
  En sommant ces inégalité pour k variant de n_1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \ < \ \sum_{k=n_1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \ = \ (n - n_1 + 1)\ \frac{\varepsilon}{2}$$

  D'où, comme $\dfrac{1}{n} > 0$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \ < \ \frac{n - n_1 + 1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} |c_n - \ell| & \leqslant & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} |u_k - \ell| \\ & \leqslant & \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \sum\limits_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \right) \\ & \leqslant & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \\ & \leqslant & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \dfrac{n - n_1 + 1}{n} \times \dfrac{\varepsilon}{2} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \dfrac{\varepsilon}{2} \qquad \textit{(car, comme } n \geqslant n_1\textit{, alors : } \dfrac{n - n_1 + 1}{n} \leqslant 1\textit{)} \end{array}$$

- Enfin, comme $\sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell|$ ne dépend pas de n, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_2, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose alors : $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On obtient, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|c_n - \ell| \ \leqslant \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \ \leqslant \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon$$

$$\boxed{\text{Ce qui démontre : } c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.}$$

☐

3. **Démontrer** : $\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3, \ \left.\begin{array}{c} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ d \mid (a+b)$.

Démonstration.
Soit $(a,b,d) \in \mathbb{Z}^3$.
Supposons : $\left\{\begin{array}{c} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right.$.

- Tout d'abord :
  - × comme $d \mid a$, alors il existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = q_1\, d$.
  - × comme $d \mid b$, alors il existe $q_2 \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = q_2\, d$.
- On en déduit :

$$a + b \ = \ q_1\, d + q_2\, d \ = \ (q_1 + q_2)\, d$$

Ainsi, en notant $q = q_1 + q_2$, on obtient :

× $q \in \mathbb{Z}$,

× $a + b = qd$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } q \mid (a+b).}$$

☐

4. Déterminer le PGCD de 924 et 140 :

a) par algorithme d'Euclide,

b) par décomposition en facteurs premiers.

Démonstration.

a) On remarque :

× $924 = 140 \times 6 + 84$

× $140 = 84 \times 1 + 56$

× $84 = 56 \times 1 + \boxed{28}$

× $56 = 28 \times 2 + 0$.

$$\boxed{\text{Par algorithme d'Euclide : } 924 \wedge 140 = 28.}$$

b) On a les décompositions en facteurs premiers suivantes :

- × $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$
- × $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

$$\boxed{\text{On en déduit : } 924 \wedge 140 = 2^2 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^1 = 28.}$$

☐

5. **Problème du sac à dos**

On dispose d'une collection d'objets sous forme de deux listes `valeurs` et `poids` représentant respectivement leurs valeurs et leurs poids, supposés entiers. On cherche à remplir un sac à dos de manière optimale sans dépasser le poids maximal qu'il peut contenir. Ce poids maximal sera donné par un entier `poids_max`.

Pour cela, à chaque étape, on met dans le sac à dos l'objet ayant le meilleur ratio valeur/poids parmi les objets ayant un poids inférieur à ce qu'il est encore possible de mettre dans le sac à dos. On représente cette sélection par une liste de 0 et de 1 selon que les objets sont choisis ou non.

a) Supposons qu'on a défini les variables suivantes.

- × `valeurs = [126, 32, 20, 5, 18, 80]`
- × `poids = [14, 2, 5, 1, 6, 9]`
- × `poids_max = 15`

Vérifier alors que la sélection `[0, 1, 0, 1, 0, 1]` est valide. Est-elle optimale ?

Démonstration.

- La sélection définie par la liste `[0, 1, 0, 1, 0, 1]` correspond à la sélection des objets de poids 2, 1 et 9 (et de valeurs 32, 5 et 80).
- La somme de ces poids vaut $2 + 1 + 9 = 12$. Or : $12 \leqslant 15 =$ `poids_max`.

$$\boxed{\text{La sélection } \texttt{[0, 1, 0, 1, 0, 1]} \text{ est donc valide.}}$$

- La valeur totale de la sélection `[0, 1, 0, 1, 0, 1]` est $32 + 5 + 80 = 117$.
  Or la sélection `[1, 0, 0, 0, 0, 0]` est valide (de poids total $14 \leqslant$ `poids_max`) et de valeur $126 > 117$.

$$\boxed{\text{La sélection } [0, 1, 0, 1, 0, 1] \text{ n'est donc pas optimale.}}$$

☐

b) (*) Écrire une fonction `objets_disponibles` qui prend en paramètres la liste `poids` des poids de tous les objets, un entier `capacite` correspondant à la charge maximale et une liste `selection` telle que définie précédemment, et qui renvoie la liste des objets qui n'ont pas déjà été sélectionnés et dont le poids est inférieur ou égal à la capacité.

Démonstration.

On propose le script suivant.

```python
def objets_disponibles(poids, capacite, selection) :
    n = len(poids)
    objets = []
    for i in range(n) :
        if selection[i] == 0 and poids[i] <= capacite :
            objets.append(i)
    return objets
```

☐

c) (*) Écrire une fonction `choix_objet` qui prend en paramètres les listes `valeurs`, `poids` et `objets`, et qui renvoie un élément de la liste d'entiers `objets` donnant un ratio valeur/poids maximal.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
def choix_objet(valeurs, poids, objets) :
    n = len(valeurs)
    ratio = [valeurs[i] / poids[i] for i in range(n)]
    i_max = objets[0]
    for i in objets :
        if ratio[i] > ratio[i_max] :
            i_max = i
    return i
max
```

□

d) Écrire une fonction `sac_a_dos` qui prend en paramètres les listes `valeurs` et `poids`, et l'entier naturel `poids_max`, et qui renvoie, sous forme de liste, la sélection d'objets obtenue par stratégie gloutonne.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```
def sac_a_dos(valeurs, poids, poids_max) :
    n = len(valeurs)
    selection = [0]*n
    capacite = poids_max
    obj_dispo = objets_disponibles(poids, capacite, selection)
    while obj_dispo != [] :
        i_objet = choix_objet(valeurs, poids, obj_dispo)
        selection[i_objet] = 1
        capacite = capacite - poids[i_objet]
        obj_dispo = objets_disponibles(poids, capacite, selection)
    return selection
```

□

Exercice 2

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de u_0.

Démonstration.

- Tout d'abord, u_1 est bien définie car $0+1+u_0 \geqslant 0$ (car $u_0 \in \mathbb{R}_+$. De plus :

$$u_1 \;=\; \sqrt{0+1+u_0} \;=\; \sqrt{1+u_0}$$

- Ensuite, u_2 est bien définie car $1+1+u_1 \geqslant 0$ (car $u_1 = \sqrt{1+u_0} \geqslant 0$) :

$$u_2 \;=\; \sqrt{1+1+u_1} \;=\; \sqrt{2+\sqrt{1+u_0}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les quantités } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont bien définies et :}\\ u_1 = \sqrt{1+u_0} \qquad u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1+u_0}}\end{array}}$$

☐

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et positive.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ bien définie} \\ u_n \geqslant 0 \end{array}\right.$

- ▸ **Initialisation**
  D'après l'énoncé, u_0 existe et : $u_0 \geqslant 0$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ bien définies} \\ u_{n+1} \geqslant 0 \end{array}\right.$).
  - Par hypothèse de récurrence, la quantité u_n existe et : $u_n \geqslant 0$.
    On en déduit : $n+1+u_n \geqslant 0$. Ainsi $\sqrt{n+1+u_n}$ est bien définie, et donc u_{n+1} aussi.
  - De plus :

$$\begin{array}{rccl} & n+1+u_n & \geqslant & 0 \\ \text{donc} & \sqrt{n+1+u_n} & \geqslant & 0 \quad \textit{(par croissance de } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{d'où} & u_{n+1} & \geqslant & 0 \end{array}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, la suite } (u_n) \text{ est bien définie et positive.}}$$

☐

3. Montrer que pour tout réel $a \geqslant 0$: $\sqrt{a} \leqslant \dfrac{1}{2}(1+a)$.

Démonstration.

La fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & h(1) + h'(1)\,(x-1) \\ & = & 1 + \dfrac{1}{2}\,(x-1) \;=\; \dfrac{1}{2}\,(x+1) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall a \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{a} \leqslant \dfrac{1}{2}\,(x+1).}$$

Commentaire

- Le membre de droite de l'inégalité souhaitée est une fonction polynomiale de degré 1. Sa représentation graphique est donc une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $a \mapsto \sqrt{a} - \frac{1}{2}\,(1+a)$.

☐

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \ \leqslant\ u_n \ \leqslant\ n + \frac{u_0}{2^n}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

- **Initialisation**
  - × D'une part, d'après l'énoncé : $u_0 \geqslant 0$.
  - × D'autre part : $0 + \dfrac{u_0}{2^0} = u_0$.

  Ainsi : $\sqrt{0} \leqslant u_0 \leqslant 0 + \dfrac{u_0}{2^0}$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédite** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sqrt{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant n+1+\dfrac{u_0}{2^{n+1}}$).
  - Tout d'abord, d'après *2.* : $u_n \geqslant 0$ Ainsi :

$$\begin{array}{rcccl} & n+1 & \leqslant & n+1+u_n & \\ \text{donc} & \sqrt{n+1} & \leqslant & \sqrt{n+1+u_n} & \textit{(par croissance de } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{d'où} & \sqrt{n+1} & \leqslant & u_{n+1} & \end{array}$$

  - D'après la question précédente appliquée à $a = n+1+u_n \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$u_{n+1} \ = \ \sqrt{n+1+u_n} \ \leqslant\ \frac{1}{2}\,\big(1 + (n+1+u_n)\big)$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & \leqslant & \dfrac{1}{2}\,(n+2+u_n) & \\ & \leqslant & \dfrac{1}{2}\left(n+2+\left(n+\dfrac{u_0}{2^n}\right)\right) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(2n+2+\dfrac{u_0}{2^n}\right) & \\ & = & n+1+\dfrac{u_0}{2^{n+1}} & \end{array}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}.}$$

☐

5. Justifier : $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

Démonstration.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

- Tout d'abord, par définition de u_{n-1} :

$$u_{n-1} \; = \; \sqrt{(n-2)+1+u_{n-2}} \; = \; \sqrt{n-1+u_{n-2}}$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{lccccc}
 & \sqrt{n-2} & \leqslant & u_{n-2} & \leqslant & n-2+\dfrac{u_0}{2^{n-2}} \\[2mm]
\text{donc} & n-1+\sqrt{n-2} & \leqslant & n-1+u_{n-2} & \leqslant & 2n-3+\dfrac{u_0}{2^{n-2}} \\[2mm]
\text{d'où} & \sqrt{n-1+\sqrt{n-2}} & \leqslant & \sqrt{n-1+u_{n-2}} & \leqslant & \sqrt{2n-3+\dfrac{u_0}{2^{n-2}}} \\[2mm]
\text{ainsi} & \sqrt{n-1+\sqrt{n-2}} & \leqslant & u_{n-1} & \leqslant & \sqrt{2n-3+\dfrac{u_0}{2^{n-2}}} \\[2mm]
\text{alors} & \dfrac{\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}}}{n} & \leqslant & \dfrac{u_{n-1}}{n} & \leqslant & \dfrac{\sqrt{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n}
\end{array}$$

(par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$)

- Or :
  - × d'une part :

$$\frac{\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}}}{n} \; = \; \sqrt{\frac{n-1+\sqrt{n-2}}{n^2}} \; = \; \sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{\sqrt{n-2}}{n^2}}$$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{\sqrt{n-2}}{n^2} = 0$.
Ainsi, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{\sqrt{n-2}}{n^2}} = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}}}{n} \; = \; 0$$

  - × d'autre part :

$$\frac{\sqrt{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n} \; = \; \sqrt{\frac{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}{n^2}} \; = \; \sqrt{2\,\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{u_0}{n^2\,2^{n-2}}}$$

De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\,\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{u_0}{n^2\,2^{n-2}} = 0$.
Par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2\,\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{u_0}{n^2\,2^{n-2}}} = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n} \; = \; 0$$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0. \text{ Autrement dit : } u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n).}$$

$\square$

6. ***a)*** Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(u_n)^2}{n} = 1$.
On pourra utiliser la question précédente ainsi que la relation qui définit u_n en fonction de u_{n-1}.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_n :

$$\begin{array}{rrcl} & u_n & = & \sqrt{n+u_{n-1}} \\[2mm] \text{donc} & (u_n)^2 & = & n+u_{n-1} \\[2mm] \text{d'où} & \dfrac{(u_n)^2}{n} & = & \dfrac{n+u_{n-1}}{n} \\[4mm] \text{ainsi} & \dfrac{(u_n)^2}{n} & = & 1+\dfrac{u_{n-1}}{n} \end{array}$$

- Or, d'après la question précédente : $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(u_n)^2}{n} = 1+0 = 1.}$$

☐

b) En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(u_n)^2}{n} = 1$.

Ainsi, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{(u_n)^2}{n}} = \sqrt{1} = 1$. On obtient :

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}.}$$

☐

7. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \sqrt{n}$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}} & = & \dfrac{(u_n)^2-n}{u_n+\sqrt{n}} & \textit{(car } u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}\textit{)} \\[4mm] & = & \dfrac{(u_n-\sqrt{n})\,\cancel{(u_n+\sqrt{n})}}{\cancel{u_n+\sqrt{n}}} & \\[4mm] & = & u_n-\sqrt{n} \ = \ v_n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n+\sqrt{n}}}$$

☐

8. Démontrer : $u_n + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\,\frac{u_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}$$

Or, d'après ***6.b)*** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$. Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } u_n + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.}$$

☐

9. Établir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}}$$

- De plus, d'après la question ***6.b)*** : $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$. On obtient :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$$

- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

  On sait de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 0$. Ainsi, par continuité de $\sqrt{\cdot}$ en 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$$

- Enfin, deux suites équivalentes ont même limite. On en déduit que (v_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge et : } \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}.}$$

☐

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \frac{1}{2} = 0$. Autrement dit : $v_n - \frac{1}{2} = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Ainsi :

$$u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) - \left(\sqrt{n} + \cancel{\frac{1}{2}} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - 1\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &= \sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{n}\right) \qquad \textit{(car } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0\textit{)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On remarque : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$. Or deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang. La suite $(u_{n+1} - u_n)$ est donc positive à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante à partir d'un certain rang.}}$$

☐

Exercice 3

Dans tout le problème, μ désignera une application continue sur $\mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution du problème de Cauchy :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} y'' + y & = & \mu(x) \quad (E) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Partie I

Dans cette partie **uniquement**, on se place dans le cas particulier où μ est la fonction sin.

1. Résoudre alors l'équation (E).

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) :

$$y'' + y \ = \ 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. On détermine donc les solutions de son équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$.
Cette équation admet exactement 2 racines complexes : $r_1 = i = 0 + 1 \times i$ et $\overline{r_1}$.
L'ensemble des solutions de (H) est donc :

$$\begin{array}{rl} & \{x \mapsto \lambda_1 \, e^{0\times x} \cos(1 \times x) + \lambda_2 \, e^{0 \times x} \sin(1 \times x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ = & \{x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (H) \text{ est : } \{x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

- On cherche maintenant une solution particulière complexe de l'équation (E') :

$$y'' + y \ = \ e^{ix}$$

Comme i est une racine simple de $Q(X) = X^2 + 1$, on cherche une solution particulière de (E') sous la forme $x \mapsto a \, x \, e^{ix}$.
Soit $a \in \mathbb{C}$.
On pose $h : x \mapsto a \, x \, e^{ix}$.

  × La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) \ = \ a \left(1 \times e^{ix} + x \times i \, e^{ix}\right) \ = \ a \, (1 + ix) \, e^{ix}$$

  Ensuite :

$$h''(x) \ = \ a \left(i \times e^{ix} + (1 + ix) \times i \, e^{ix}\right) \ = \ a \, (2i - x) \, e^{ix}$$

  × On obtient :

$$\begin{array}{rcl} h \text{ solution de } (E') & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \ h''(x) + h(x) = e^{ix} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \ a \, (2i - x) \, e^{ix} + a \, x \, e^{ix} = e^{ix} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \ a \, (2i - x) + a \, x = 1 \qquad \textit{(car, comme } |e^{ix}| = 1, \textit{ alors : } e^{ix} \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, 2ia = 1 \\ & \Leftrightarrow & a = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{1}{2} \, i \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g : x \mapsto -\frac{1}{2} \ i \ x \ e^{ix} \text{ est donc une solution particulière de } (E').}$$

- On en déduit que la fonction $\mathrm{Im}\,(g)$ est une solution particulière de (E).
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,(g)\,(x) & = & \mathrm{Im}\,(g(x)) \\ & = & \mathrm{Im}\left(-\dfrac{1}{2}\; i\; x\; \mathrm{e}^{ix}\right) \\ & = & -\dfrac{1}{2}\; x\, \mathrm{Im}\left(i\, \mathrm{e}^{ix}\right) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Im}\,(\cdot)\textit{)} \end{array}$$
  Or :
  $$i\, \mathrm{e}^{ix} \;=\; i\, \big(\cos(x) + i\, \sin(x)\big) \;=\; i\, \cos(x) - \sin(x)$$
  Ainsi : $\mathrm{Im}\left(i\, \mathrm{e}^{ix}\right) = \cos(x)$. D'où :
  $$\mathrm{Im}\,(g)\,(x) \;=\; -\frac{1}{2}\; x \times \cos(x)$$

$$\boxed{\text{Une solution particulière de } (E) \text{ est donc } x \mapsto -\frac{1}{2}\; x\, \cos(x).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en conclut que l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est :} \\ \{x \mapsto \lambda_1\, \cos(x) + \lambda_2\, \sin(x) - \dfrac{1}{2}\; x\, \cos(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}\end{array}}$$

$\square$

2. Expliciter la fonction φ.

Démonstration.

- La fonction φ est solution du problème de Cauchy fourni par l'énoncé. En particulier, φ est solution de (E).
  D'après la question précédente, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
  $$\varphi : x \mapsto \lambda_1\, \cos(x) + \lambda_2\, \sin(x) - \frac{1}{2}\; x\, \cos(x)$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{array}{rcl} \varphi'(x) & = & -\lambda_1\, \sin(x) + \lambda_2\, \cos(x) - \dfrac{1}{2}\, \Big(1 \times \cos(x) + x \times \big(-\sin(x)\big)\Big) \\ & = & \left(\dfrac{1}{2}\; x - \lambda_1\right) \sin(x) + \left(\lambda_2 - \dfrac{1}{2}\right) \cos(x) \end{array}$$
- Comme φ est solution du problème de Cauchy de l'énoncé, elle est solution du système :
  $$\left\{\begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \end{array}\right.$$
  Or :
  $$\begin{array}{rl} \left\{\begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \end{array}\right. & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1\, \cos(0) + \cancel{\lambda_2\, \sin(0) - \dfrac{1}{2} \times 0 \times \cos(0)} = 0 \\ \cancel{\left(\dfrac{1}{2} \times 0 - \lambda_1\right)} \sin(0) + \left(\lambda_2 - \dfrac{1}{2}\right) \cos(0) = 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi : x \mapsto \frac{1}{2}\; \sin(x) - \frac{1}{2}\; x\, \cos(x).}$$

$\square$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-t} \varphi(t)\, dt$.

a) Justifier : $e^{in\pi} = (-1)^n$.

Démonstration.
Par formule de Moivre : $e^{in\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^n = (-1)^n$.

$$\boxed{\text{Finalement : } e^{in\pi} = (-1)^n.}$$

☐

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-t} \sin(t)\, dt = \frac{1-(-1)^n e^{-n\pi}}{2}$.

On pourra penser à utiliser une partie imaginaire.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto e^{-t} \sin(t)$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, n\pi]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-t} \sin(t)\, dt$ est donc bien définie.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} e^{-t} \sin(t)\, dt &= \int_0^{n\pi} e^{-t}\, \mathrm{Im}\left(e^{it}\right) dt \\
&= \int_0^{n\pi} \mathrm{Im}\left(e^{-t} e^{it}\right) dt \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Im}(\cdot)\textit{)} \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^{n\pi} e^{(-1+i)t}\, dt\right)
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} e^{(-1+i)t}\, dt &= \left[\frac{1}{-1+i} e^{(-1+i)t}\right]_0^{n\pi} \\
&= \frac{1}{-1+i}\left(e^{(-1+i)\,n\pi} - 1\right) \\
&= \frac{1}{-1+i}\left(e^{-n\pi} e^{in\pi} - 1\right) \\
&= \frac{1}{-1+i}\left(e^{-n\pi} (-1)^n - 1\right) \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{-1-i}{2}\left((-1)^n e^{-n\pi} - 1\right)
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(\int_0^{n\pi} e^{(-1+i)t}\, dt\right) &= \mathrm{Im}\left(\frac{-1-i}{2}\left((-1)^n e^{-n\pi} - 1\right)\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{2}\left((-1)^n e^{-n\pi} - 1\right) - i\,\frac{1}{2}\left((-1)^n e^{-n\pi} - 1\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left((-1)^n e^{-n\pi} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^{n\pi} e^{-t} \sin(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n e^{-n\pi}\right).}$$

☐

c) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\,dt = -\frac{n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}$.

On pourra penser à utiliser une partie réelle puis intégrer par parties.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, n\pi]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\,dt$ est donc bien définie.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\,dt &= \int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\,dt \\ &= \int_0^{n\pi} \mathrm{Re}\left(t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{it}\right)\,dt && \textit{(par linéarité de } \mathrm{Re}\,(\cdot)\textit{)} \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt\right)\end{aligned}$$

- On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{lllllll} u(t) & = & t & \quad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{(-1+i)t} & & v(t) & = & \dfrac{1}{-1+i}\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}&\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt \\ =\ & \left[t \times \frac{1}{-1+i}\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 1 \times \frac{1}{-1+i}\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt \\ =\ & \frac{1}{-1+i}\left(n\pi\,\mathrm{e}^{(-1+i)\,n\pi} - 0\right) - \frac{1}{-1+i}\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt \\ =\ & \frac{1}{-1+i}\left(n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,\mathrm{e}^{in\pi} - \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt\right) \\ =\ & \frac{1}{-1+i}\left(n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,(-1)^n - \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ =\ & \frac{1}{-1+i}\left(n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,(-1)^n - \frac{1}{-1+i}\left((-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} - 1\right)\right) && \textit{(d'après le calcul effectué en question précédente)} \\ =\ & \frac{1}{-1+i}\,n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} - \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} - 1}{(-1+i)^2} \\ =\ & \frac{-1-i}{2}\,n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} - \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} - 1}{2i}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt &= \frac{-1-i}{2}\,n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} + i\,\frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}-1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\,n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} + i\left(-\frac{n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2} + \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}-1}{2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt\right) = -\frac{1}{2}\,n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,dt = -\frac{n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}.}$$

☐

d) En déduire : $I_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\varphi(t)\,dt \\ &= \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{2}\,\sin(t) - \frac{1}{2}\,t\,\cos(t)\right)\,dt && \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\,dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1-(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2} - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}\right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)} \\ &= \frac{1-(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} + n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{4} \\ &= \frac{1+(n\pi-1)\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n.}$$

☐

4. a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n\right| \leqslant n\pi\mathrm{e}^{-n\pi}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n\right| &= \left|\mathrm{e}^{-n\pi}\right|\,|n\pi-1|\,\left|-1\right|^n \\ &= \mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\times 1 && \textit{(car } e^{-n\pi} \geqslant 0 \textit{ et } n\pi - 1 \geqslant 0\textit{)}\end{aligned}$$

Or : $n\pi - 1 \leqslant n\pi$. Comme $\mathrm{e}^{-n\pi} \geqslant 0$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1) \leqslant \mathrm{e}^{-n\pi}\,n\pi$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n\right| \leqslant n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi}.}$$

☐

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n = 0$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$0 \leqslant \left|\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n\right| \leqslant n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi}$$

Or :

× d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

× d'autre part, avec le changement de variable $\boxed{x = n\pi}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi} = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n = 0.}$$

☐

c) Conclure quant à la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
D'après la question ***3.d)***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n$$

Or, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (I_n) \text{ est convergente et : } \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times 0 = \frac{1}{4}.}$$

☐

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général d'une fonction μ, continue sur $\mathbb{R}$, quelconque. On définit alors :

$$G : x \mapsto \int_0^x \mu(t)\,\cos(t)\,dt \quad \text{et} \quad H : x \mapsto \int_0^x \mu(t)\,\sin(t)\,dt$$

5. On note F la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x)\,G(x) - \cos(x)\,H(x) \end{array}$$

a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction $g : t \mapsto \mu(t)\,\cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
  La fonction G étant l'unique primitive de g qui s'annule en 0, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

On aurait également pu voir G comme une intégrale fonction de ses bornes. On aurait alors adopté la rédaction suivante.

- La fonction $u : t \mapsto \mu(t) \cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive U de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$G(x) = \int_0^x \mu(t) \cos(t) \, dt = \left[\, U(t) \, \right]_0^x = U(x) - U(0)$$

La fonction G est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que transformée affine de U qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $h : t \mapsto \mu(t) \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
  La fonction H étant l'unique primitive de h qui s'annule en 0, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction F est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme $F = \sin \times G - \cos \times H$ où :
  - × sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - × G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - × cos est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - × H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

$\square$

b) Déterminer F'.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& F'(x) \\
= \ & \sin'(x) \times G(x) + \sin(x) \times G'(x) - \big(\cos'(x) \times H(x) + \cos(x) \times H'(x) \big) \\
= \ & \cos(x) \, G(x) + \sin(x) \, g(x) - \big(- \sin(x) \, H(x) + \cos(x) \, h(x) \big) \qquad \textit{(car } G \textit{ est une primitive de } g \textit{ et } H \textit{ une primitive de } h\textit{)} \\
= \ & \cos(x) \, G(x) + \cancel{\sin(x) \, \mu(x) \, \cos(x)} + \sin(x) \, H(x) - \cancel{\cos(x) \, \mu(x) \, \sin(x)} \\
= \ & \cos(x) \, G(x) + \sin(x) \, H(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement } F' : x \mapsto \cos(x) \, G(x) + \sin(x) \, H(x).}$$

$\square$

c) À l'aide de la question précédente, démontrer que la fonction F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction F' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme $F' = \cos \times G + \sin \times H$ où :

- × cos est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- × G est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- × sin est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- × H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction F' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } F \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

$\square$

d) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) + F(x) = \mu(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
En dérivant l'expression obtenue en ***5.b)***, on obtient :

$$\begin{aligned}
& F''(x) \\
= \ & \cos'(x) \times G(x) + \cos(x) \times G'(x) + \big(\sin'(x) \times H(x) + \sin(x) \times H'(x)\big) \\
= \ & -\sin(x)\, G(x) + \cos(x)\, g(x) + \big(\cos(x)\, H(x) + \sin(x)\, h(x)\big) && \textit{(car } G \textit{ est une primitive de } g \textit{ et } H \textit{ une primitive de } h\textit{)} \\
= \ & -\sin(x)\, G(x) + \mu(x)\, \cos^2(x) + \cos(x)\, H(x) + \mu(x)\, \sin^2(x) \\
= \ & -\sin(x)\, G(x) + \cos(x)\, H(x) + \mu(x)\, \big(\cos^2(x) + \sin^2(x)\big) \\
= \ & -F(x) + \mu(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) + F(x) = \mu(x).}$$

$\square$

e) En déduire : $F = \varphi$.

Démonstration.
Comme φ est l'unique solution au problème de Cauchy de l'énoncé, il s'agit de démontrer que F est également solution de ce problème de Cauchy.

- Tout d'abord, d'après la question précédente :

$$F'' + F \ = \ \mu$$

- Vérifions si : $F(0) = 0$.

$$F(0) \ = \ \cancel{\sin(0)\, G(0)} - \cos(0)\, H(0) \ = \ -\int_0^0 \mu(t)\, \sin(t)\, dt \ = \ 0$$

- Vérifions si : $F'(0) = 0$.

$$F'(0) \ = \ \cos(0)\, G(0) + \cancel{\sin(0)\, H(0)} \ = \ \int_0^0 \mu(t)\, \cos(t)\, dt \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } F = \varphi.}$$

$\square$

Partie III

Dans cette dernière partie, on suppose que μ est définie par $\mu : x \mapsto \left|\sin(x)\right|$.
On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n \;=\; \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin(t)\right| \, dt \qquad \text{et} \qquad K_n \;=\; \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t} \, F(t) \, dt$$

où la fonction F a été définie et étudiée dans la partie précédente.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin(t)\right| \, dt$.

a) Calculer v_0.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{aligned} v_0 &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin(t)\right| \, dt \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \, dt && \textit{(car : } \forall t \in [0,\pi],\ \sin(t) \geqslant 0\textit{)} \\ &= \frac{1-(-1)^1 \, \mathrm{e}^{-1\times\pi}}{2} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)}} \textit{ en } n=1\textit{)} \\ &= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_0 = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}}$$

☐

b) Montrer qu'il existe un réel $q > 0$ (que l'on explicitera) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = q^n \, v_0$.
On pourra utiliser le changement de variable $x = t - n\pi$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On effectue le changement de variable $\boxed{x = t - n\pi}$.

$$\left| \begin{array}{l} x = t - n\pi \\ \hookrightarrow dx = dt \quad \text{et} \quad dt = dx \\ \bullet\ t = n\pi \ \Rightarrow\ x = 0 \\ \bullet\ t = (n+1)\pi \ \Rightarrow\ x = \pi \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto x + n\pi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(x+n\pi)} \left|\sin(x+n\pi)\right| \, dx \\ &= \mathrm{e}^{-n\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x} \left|(-1)^n \sin(x)\right| \, dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \mathrm{e}^{-n\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x} \left|\sin(x)\right| \, dx \\ &= \left(\mathrm{e}^{-\pi}\right)^n \; v_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On posant } q = \mathrm{e}^{-\pi} > 0, \text{ on obtient alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = q^n \, v_0.}$$

☐

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin(t)\right| \, dt \\
&= \int_{0\times\pi}^{\big((n-1)+1\big)\pi} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin(t)\right| \, dt && \textit{(par relation de Chasles)} \\
&= \int_{0}^{n\pi} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin(t)\right| \, dt \\
&= J_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k.}$$

☐

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de J_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
J_n &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} q^k \, v_0 && \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\
&= v_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k && \textit{(par linéarité de } \textstyle\sum \textit{)} \\
&= v_0 \, \frac{1-q^n}{1-q} && \textit{(car : } q = e^{-\pi} \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} \times \frac{1-q^n}{1-q} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{(1+\mathrm{e}^{-\pi})\,(1-\mathrm{e}^{-n\pi})}{2\,(1-\mathrm{e}^{-\pi})}.}$$

☐

e) Conclure quant à la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.

- Comme $\mathrm{e}^{-\pi} \in \,]-1, 1[$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^{-\pi})^n = 0$.
- On en déduit que la suite (J_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{(1+\mathrm{e}^{-\pi})\,(1-0)}{2\,(1-\mathrm{e}^{-\pi})} = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2\,(1-\mathrm{e}^{-\pi})}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2\,(1-\mathrm{e}^{-\pi})}}$$

☐

7. a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n en fonction de J_n et des quantités :

$$\alpha_n \ = \ \mathrm{e}^{-n\pi}\, F(n\pi) \qquad \text{et} \qquad \beta_n \ = \ \mathrm{e}^{-n\pi}\, F'(n\pi)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} u(t) & = & F(t) & u'(t) & = & F'(t) \\[2ex] v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right.$$

  On obtient :

$$\begin{array}{rcl} K_n & = & \displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\, F(t)\ dt \\[2ex] & = & \Big[\ F(t) \times (-\mathrm{e}^{-t})\ \Big]_0^{n\pi} - \displaystyle\int_0^{n\pi} F'(t) \times (-\mathrm{e}^{-t})\ dt \\[2ex] & = & -\mathrm{e}^{-n\pi}\, F(n\pi) + F(0) + \displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\, F'(t)\ dt \\[2ex] & = & -\alpha_n + \displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t} F'(t)\ dt \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.e)}}\textit{, F est solution du problème de Cauchy de l'énoncé, donc : } F(0) = 0\textit{)} \end{array}$$

- On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} u(t) & = & F'(t) & u'(t) & = & F''(t) \\[2ex] v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right.$$

  On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\, F'(t)\ dt & = & \Big[\ F'(t) \times (-\mathrm{e}^{-t})\ \Big]_0^{n\pi} - \displaystyle\int_0^{n\pi} F''(t) \times (-\mathrm{e}^{-t})\ dt \\[2ex] & = & -\mathrm{e}^{-n\pi}\, F'(n\pi) + F'(0) + \displaystyle\int_0^{n\pi} F''(t)\, \mathrm{e}^{-t}\ dt \\[2ex] & = & -\beta_n + \displaystyle\int_0^{n\pi} F''(t)\, \mathrm{e}^{-t}\ dt \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.e)}}\textit{, F est solution du problème de Cauchy de l'énoncé, donc : } F'(0) = 0\textit{)} \end{array}$$

  On en déduit :

$$K_n \ = \ -\alpha_n - \beta_n + \int_0^{n\pi} F''(t)\, \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

- Enfin, d'après ***5.d)***, la fonction F est solution de (E). Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} F''(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt &= \int_0^{n\pi} \big(-F(t)+\mu(t)\big)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \\ &= -\int_0^{n\pi} F(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt + \int_0^{n\pi} \mu(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= -\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,F(t)\,dt + \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\big|\sin(t)\big|\,dt && \textit{(car, en } \textbf{Partie III}\textit{, } \mu : t \mapsto \big|\sin(t)\big|\textit{)} \\ &= -K_n + J_n\end{aligned}$$

- On obtient :

$$K_n = -\alpha_n - \beta_n - K_n + J_n$$

Ainsi :

$$2\,K_n = -\alpha_n - \beta_n + J_n$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \frac{1}{2}\,(-\alpha_n - \beta_n + J_n).}$$

☐

b) On **admet** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big|F(n\pi)\big| \leqslant 2n\pi$. Justifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
On pourrait également montrer, mais on l'admettra également aujourd'hui : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque :

$$|\alpha_n| = \big|\mathrm{e}^{-n\pi}\,F(n\pi)\big| = \big|\mathrm{e}^{-n\pi}\big|\,\big|F(n\pi)\big| = \mathrm{e}^{-n\pi}\,\big|F(n\pi)\big| \qquad \textit{(car } e^{-n\pi} > 0\textit{)}$$

Ainsi, d'après l'énoncé :

$$0 \leqslant |\alpha_n| \leqslant \mathrm{e}^{-n\pi}\,2n\pi$$

- Or :
  - × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
  - × d'autre part, avec le changement de variable $\boxed{x = n\pi}$:

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi} = \lim_{x\to+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.}$$

☐

c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.

- On rappelle, d'après ***7.a)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$K_n = \frac{1}{2}\,(-\alpha_n - \beta_n + J_n)$$

- Or, d'après ***6.e)*** et ***7.b)***, les suites (J_n), (α_n) et (β) sont convergentes. On en déduit que (K_n) est convergente.

- De plus, toujours d'après ***6.e)*** et ***7.b)*** :

$$\lim_{n\to+\infty} K_n \;=\; \frac{1}{2}\left(-0-0+\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{4\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}}$$

$\square$