DS5 /120

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours /30

1. Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & & & = & 0 \end{array}\right.$

- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 \\ & & & - & 3z & + & 3t & = & 0 \\ & - & 3y & & & + & 3t & = & 0 \\ & - & 3y & - & 3z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 \\ & - & 3y & & & + & 3t & = & 0 \\ & & & - & 3z & + & 3t & = & 0 \\ & & & & & - & 2t & = & 0 \end{array}\right.$
- **1 pt : L'ensemble des solutions du système initial est $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.**

2. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note (c_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Démontrer : $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- **1 pt :** $|c_n - \ell| = \dfrac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n} (u_k - \ell)\right|$
- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : comme la suite (u_n) converge vers ℓ, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :**

$$\forall k \geqslant n_1,\ |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

- **1 pt : En sommant ces inégalité pour k variant de n_1 à n, on obtient :**

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n_1}^{n} |u_k - \ell| \ < \ \frac{n - n_1 + 1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2}$$

- **1 pt : sommation par paquets**
- **1 pt :** $|c_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| + \dfrac{\varepsilon}{2}$ **(car, comme $n \geqslant n_1$, alors : $\dfrac{n-n_1+1}{n} \leqslant 1$)**
- **1 pt : comme $\sum\limits_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell|$ ne dépend pas de n, alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :**

$$\forall n \geqslant n_2, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1-1} |u_k - \ell| \ < \ \frac{\varepsilon}{2}$$

- **1 pt :** $n_0 = \max(n_1, n_2)$ **et conclusion**

3. **Démontrer** : $\forall (a, b, d) \in \mathbb{Z}^3, \quad \left.\begin{array}{l} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d \mid (a+b)$.

- **1 pt : comme $d \mid a$, alors il existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = q_1\, d$. (idem pour l'hypothèse $d \mid b$)**
- **1 pt : en notant $q = q_1 + q_2$, on obtient :**
  × $q \in \mathbb{Z}$,
  × $a + b = qd$.

4. Déterminer le PGCD de 924 et 140 :

a) par algorithme d'Euclide,

- **1 pt : divisions euclidiennes et conclusion**
  × $924 = 140 \times 6 + 84$
  × $140 = 84 \times 1 + 56$
  × $84 = 56 \times 1 + \boxed{28}$
  × $56 = 28 \times 2 + 0$.

b) par décomposition en facteurs premiers.

- **1 pt : décompositions en facteurs premiers et conclusion**
  × $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$
  × $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

5. **Problème du sac à dos**

On dispose d'une collection d'objets sous forme de deux listes `valeurs` et `poids` représentant respectivement leurs valeurs et leurs poids, supposés entiers. On cherche à remplir un sac à dos de manière optimale sans dépasser le poids maximal qu'il peut contenir. Ce poids maximal sera donné par un entier `poids_max`.

Pour cela, à chaque étape, on met dans le sac à dos l'objet ayant le meilleur ratio valeur/poids parmi les objets ayant un poids inférieur à ce qu'il est encore possible de mettre dans le sac à dos. On représente cette sélection par une liste de 0 et de 1 selon que les objets sont choisis ou non.

a) Supposons qu'on a défini les variables suivantes.

× `valeurs = [126, 32, 20, 5, 18, 80]`
× `poids = [14, 2, 5, 1, 6, 9]`
× `poids_max = 15`

Vérifier alors que la sélection `[0, 1, 0, 1, 0, 1]` est valide. Est-elle optimale ?

- **1 pt : La somme des poids des objets sélectionnés vaut $2 + 1 + 9 = 12$. Or : $12 \leqslant 15 =$ `poids_max`. La sélection `[0, 1, 0, 1, 0, 1]` est donc valide.**
- **1 pt : la sélection `[1, 0, 0, 0, 0, 0]` est valide (de poids total $14 \leqslant$ `poids_max`) et de valeur $126 > 117$. La sélection [0, 1, 0, 1, 0, 1] n'est donc pas optimale.**

b) (*) Écrire une fonction `objets_disponibles` qui prend en paramètres la liste `poids` des poids de tous les objets, un entier `capacite` correspondant à la charge maximale et une liste `selection` telle que définie précédemment, et qui renvoie la liste des objets qui n'ont pas déjà été sélectionnés et dont le poids est inférieur ou égal à la capacité.

- **1 pt : structure de fonction**
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : structure itérative**
- **2 pts : structure conditionnelle**

```python
def objets_disponibles(poids, capacite, selection) :
    n = len(poids)
    objets = []
    for i in range(n) :
        if selection[i] == 0 and poids[i] <= capacite :
            objets.append(i)
    return objets
```

c) (*) Écrire une fonction `choix_objet` qui prend en paramètres les listes `valeurs`, `poids` et `objets`, et qui renvoie un élément de la liste d'entiers `objets` donnant un ratio valeur/poids maximal.

- **1 pt : création de la liste des rapports valeur/poids**
- **1 pt : initialisation `i_max`**
- **1 pt : structure itérative**
- **1 pt : structure conditionnelle**

```python
def choix_objet(valeurs, poids, objets) :
    n = len(valeurs)
    ratio = [valeurs[i] / poids[i] for i in range(n)]
    i_max = objets[0]
    for i in objets :
        if ratio[i] > ratio[i_max] :
            i_max = i
    return i
max
```

d) Écrire une fonction `sac_a_dos` qui prend en paramètres les listes `valeurs` et `poids`, et l'entier naturel `poids_max`, et qui renvoie, sous forme de liste, la sélection d'objets obtenue par stratégie gloutonne.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : condition `while`**
- **2 pts : contenu structure itérative**

```python
def sac_a_dos(valeurs, poids, poids_max) :
    n = len(valeurs)
    selection = [0]*n
    capacite = poids_max
    obj_dispo = objets_disponibles(poids, capacite, selection)
    while obj_dispo != [] :
        i_objet = choix_objet(valeurs, poids, obj_dispo)
        selection[i_objet] = 1
        capacite = capacite - poids[i_objet]
        obj_dispo = objets_disponibles(poids, capacite, selection)
    return selection
```

Exercice 2 /27

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de u_0.

- **1 pt : u_1 est bien défini et $u_1 = \sqrt{1+u_0}$**
- **1 pt : $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1+u_0}}$**

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et positive.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

3. Montrer que pour tout réel $a \geqslant 0$: $\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2}(1+a)$.

- **1 pt : La fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.**
  Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1.
- **1 pt : cette tangente est la droite d'équation :**

$$\begin{aligned} y &= h(1) + h'(1)\,(x-1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\,(x-1) \;=\; \frac{1}{2}\,(x+1) \end{aligned}$$

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \;\leqslant\; u_n \;\leqslant\; n + \frac{u_0}{2^n}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

Erreur d'énoncé : tout raisonnement pertinent est valorisé

5. Justifier : $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

- **1 pt :** $\sqrt{n-2} \;\leqslant\; u_{n-2} \;\leqslant\; n-2+\dfrac{u_0}{2^{n-2}}$
- **1 pt :** $\dfrac{\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}}}{n} \;\leqslant\; \dfrac{u_{n-1}}{n} \;\leqslant\; \dfrac{\sqrt{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n-1+\sqrt{n-2}}}{n} = 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n-3+\frac{u_0}{2^{n-2}}}}{n} = 0$

Barème adaptable suite à l'erreur d'énoncé de la question précédente

6. a) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(u_n)^2}{n} = 1$.
On pourra utiliser la question précédente ainsi que la relation qui définit u_n en fonction de u_{n-1}.

- **1 pt :** $\dfrac{(u_n)^2}{n} \;=\; 1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}$
- **1 pt : conclusion à l'aide de la question précédente**

b) En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

- **1 pt : continuité de** $\sqrt{\cdot}$ **en** 1

7. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \sqrt{n}$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \;=\; \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

- **1 pt : utilisation de** $u_{n-1} = (u_n)^2 - n$

8. Démontrer : $u_n + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1$

9. Établir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

- **1 pt :** $\displaystyle v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

- **1 pt :** $\displaystyle u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$
- **1 pt :** $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$
- **1 pt :** $\displaystyle u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$ **(car** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$)
- **1 pt :** $\displaystyle u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$

Exercice 3 /63

Dans tout le problème, μ désignera une application continue sur $\mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution du problème de Cauchy :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} y'' + y & = & \mu(x) & (E) \\ y(0) & = & 0 & \\ y'(0) & = & 0 & \end{array} \right.$$

Partie I

Dans cette partie **uniquement**, on se place dans le cas particulier où μ est la fonction sin.

1. Résoudre alors l'équation (E).

- **1 pt : L'ensemble des solutions de (H) est : $\{x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.**
- **1 pt : La fonction $h : x \mapsto a\, x\, e^{ix}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $h' : x \mapsto a\,(1 + ix)\, e^{ix}$ et $h'' : x \mapsto a\,(2i - x)\, e^{ix}$**
- **2 pts : h solution de $(E') \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}\, i$**
  - × **1 pt : comme $|e^{ix}| = 1$, alors : $e^{ix} \neq 0$**
  - × **1 pt : reste**
- **1 pt : $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\, i\, x\, e^{ix}$ est une solution particulière de (E')**
- **1 pt : $\mathrm{Im}\,(g) : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\, x\, \cos(x)$**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de (E) est : $\{x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) - \dfrac{1}{2}\, x \cos(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$**

2. Expliciter la fonction φ.

- **1 pt : comme φ est solution de (E), alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :**

$$\varphi : x \mapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) - \frac{1}{2}\, x \cos(x)$$

- **1 pt : $\varphi' : x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\, x - \lambda_1\right) \sin(x) + \left(\lambda_2 - \dfrac{1}{2}\right) \cos(x)$**
- **1 pt : $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$**

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-t}\, \varphi(t)\; dt$.

a) Justifier : $e^{in\pi} = (-1)^n$.

- **1 pt : par formule de Moivre**

b) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(t)\,dt = \frac{1-(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}$.

On pourra penser à utiliser une partie imaginaire.

- **1 pt : La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\,\sin(t)$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, n\pi]$.**
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(t)\,dt$ est donc bien définie.
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(t)\,dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt = \frac{1}{-1+i}\big((-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}-1\big)$
- **1 pt :** $\displaystyle\mathrm{Im}\left(\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-1-i}{2}\,\big((-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}-1\big)\right) = \frac{1}{2}\,\big(1-(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}-1\big)$

c) Démontrer : $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\,dt = -\frac{n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}$.

On pourra penser à utiliser une partie réelle puis intégrer par parties.

- **1 pt : La fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, n\pi]$.**
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\,dt$ est donc bien définie.
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\,dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt = \left[\,t \times \frac{1}{-1+i}\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,\right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 1 \times \frac{1}{-1+i}\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt$
- **2 pts :** $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,dt = \frac{-1-i}{2}\,n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi} - \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}-1}{2i}$
  - × **1 pt : utilisation de *3.a)*,**
  - × **1 pt : utilisation de la question précédente**
- **1 pt : fin du calcul**

d) En déduire : $I_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n$.

- **1 pt : d'après *2.*,** $\displaystyle I_n = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{2}\,\sin(t) - \frac{1}{2}\,t\,\cos(t)\right)dt$
- **1 pt : linéarité de l'intégrale**
- **1 pt : d'après *3.b)* et *3.c)*,** $\displaystyle I_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}\right)$

4. a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n\right| \leqslant n\pi\mathrm{e}^{-n\pi}$.

- **1 pt :** $\left|\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n\right| = \left|\mathrm{e}^{-n\pi}\right|\,|n\pi-1|\,\left|(-1)^n\right|$
- **1 pt :** $\left|\mathrm{e}^{-n\pi}\right|\,|n\pi-1|\,\left|(-1)^n\right| = \mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)$ **(car $\mathrm{e}^{-n\pi} \geqslant 0$ et $n\pi - 1 \geqslant 0$)**
- **1 pt :** $n\pi - 1 \leqslant n\pi$ **et** $\mathrm{e}^{-n\pi} \geqslant 0$

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n = 0$.

- **1 pt : avec le changement de variable $\boxed{x = n\pi}$:**

$$\lim_{n\to+\infty} n\pi\,\mathrm{e}^{-n\pi} = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

- **1 pt : reste du théorème d'encadrement** *c)* Conclure quant à la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : utilisation *3.d)* et question précédente pour conclure que (I_n) est convergente et :** $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{1}{4}$

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général d'une fonction μ, continue sur $\mathbb{R}$, quelconque. On définit alors :

$$G : x \mapsto \int_0^x \mu(t)\,\cos(t)\,dt \quad \text{et} \quad H : x \mapsto \int_0^x \mu(t)\,\sin(t)\,dt$$

5. On note F la fonction définie par :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)\,G(x) - \cos(x)\,H(x) \end{array}$$

a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : La fonction $g : t \mapsto \mu(t)\,\cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.**
  La fonction G étant l'unique primitive de g qui s'annule en 0, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- **1 pt : La fonction F est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme $F = \sin \times G - \cos \times H$ où...**

b) Déterminer F'.

- **1 pt : D'après la question précédente, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.**
- **1 pt :** $F' : x \mapsto \cos(x)\,G(x) + \sin(x)\,H(x)$

c) À l'aide de la question précédente, démontrer que la fonction F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : La fonction F' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme $F' = \cos \times G + \sin \times H$ où...**

d) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) + F(x) = \mu(x)$.

- **2 pts**

e) En déduire : $F = \varphi$.

- **1 pt : Comme φ est l'unique solution au problème de Cauchy de l'énoncé, il s'agit de démontrer que F est également solution de ce problème de Cauchy.**
- **1 pt : d'après la question précédente,** $F'' + F = \mu$
- **1 pt :** $F(0) = 0$ **et** $F'(0) = 0$

Partie III

Dans cette dernière partie, on suppose que μ est définie par $\mu : x \mapsto \big|\sin(x)\big|$.
On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\big|\sin(t)\big|\,dt \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,F(t)\,dt$$

où la fonction F a été définie et étudiée dans la partie précédente.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin(t)\right| dt$.

a) Calculer v_0.

- **1 pt :** $\forall t \in [0, \pi]$**,** $\sin(t) \geqslant 0$
- **1 pt : d'après *3.b)* en** $n = 1$**,** $v_0 = \dfrac{1 + \mathbf{e}^{-\pi}}{2}$

b) Montrer qu'il existe un réel $q > 0$ (que l'on explicitera) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = q^n\, v_0$.
On pourra utiliser le changement de variable $x = t - n\pi$.

- **1 pt : avec le changement de variable** $\boxed{x = t - n\pi}$**,** $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathbf{e}^{-(x+n\pi)} \left|\sin(x+n\pi)\right| dx$
- **1 pt :** $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$
- **1 pt :** $v_n = q^n\, v_0$ **où** $q = \mathbf{e}^{-\pi}$
- **1 pt : mention de** $q > 0$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.

- **1 pt : par relation de Chasles**

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de J_n.

- **1 pt :** $J_n = v_0 \sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k$ **(d'après la question précédente et *6.b)*)**
- **1 pt :** $J_n = v_0\, \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ **(car** $q = \mathbf{e}^{-\pi} \neq 1$**)**
- **1 pt :** $J_n = \dfrac{(1 + \mathbf{e}^{-\pi})\,(1 - \mathbf{e}^{-n\pi})}{2\,(1 - \mathbf{e}^{-\pi})}$

e) Conclure quant à la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : Comme** $\mathbf{e}^{-\pi} \in\,]-1, 1[$**, alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{e}^{-\pi})^n = 0$**.**
- **1 pt : on en déduit que** (J_n) **converge et :** $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{1 + \mathbf{e}^{-\pi}}{2\,(1 - \mathbf{e}^{-\pi})}$

7. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n en fonction de J_n et des quantités :

$$\alpha_n \;=\; \mathrm{e}^{-n\pi}\, F(n\pi) \qquad \text{et} \qquad \beta_n \;=\; \mathrm{e}^{-n\pi}\, F'(n\pi)$$

- **1 pt :** $K_n = \Big[\; F(t) \times (-\mathbf{e}^{-t}) \;\Big]_0^{n\pi} - \displaystyle\int_0^{n\pi} F'(t) \times (-\mathbf{e}^{-t})\; dt$
- **1 pt :** $K_n = -\alpha_n + \displaystyle\int_0^{n\pi} \mathbf{e}^{-t}\, F'(t)\; dt$ **((d'après *5.e)*,** F **est solution du problème de Cauchy de l'énoncé, donc :** $F(0) = 0$**)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{n\pi} \mathbf{e}^{-t}\, F'(t)\; dt = \Big[\; F'(t) \times (-\mathbf{e}^{-t}) \;\Big]_0^{n\pi} - \displaystyle\int_0^{n\pi} F''(t) \times (-\mathbf{e}^{-t})\; dt$
- **1 pt :** $K_n = -\alpha_n - \beta_n + \displaystyle\int_0^{n\pi} F''(t)\, \mathbf{e}^{-t}\; dt$ **(d'après *5.e)*,** F **est solution du problème de Cauchy de l'énoncé, donc :** $F'(0) = 0$**)**
- **1 pt : d'après *5.d)*,** F **est solution de** (E)
- **1 pt :** $K_n = \dfrac{1}{2}\, (-\alpha_n - \beta_n + J_n)$

b) On **admet** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \big|F(n\pi)\big| \leqslant 2n\pi$. Justifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
On pourrait également montrer, mais on l'admettra également aujourd'hui : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.

- **1 pt :** $|\alpha_n| \leqslant 2n\pi\, \mathrm{e}^{-n\pi}$
- **1 pt : avec le changement de variable** $\boxed{x = n\pi}$ **:**

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\pi\, \mathrm{e}^{-n\pi} \;=\; \lim_{x\to+\infty} 2x\, \mathrm{e}^{-x} \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : d'après *6.e)* et *7.b)*, les suites (J_n), (α_n) et (β) sont convergentes. On en déduit que (K_n) est convergente.**
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{4\,(1-\mathrm{e}^{-\pi})}$