DS5

⚠ On traitera OBLIGATOIREMENT les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 2. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & & & = & 0 \end{array}\right.$

2. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note (c_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Démontrer : $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

3. **Démontrer** : $\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3, \quad \left.\begin{array}{c} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d \mid (a+b)$.

4. Déterminer le PGCD de 924 et 140 :

a) par algorithme d'Euclide,

b) par décomposition en facteurs premiers.

5. **Problème du sac à dos**

On dispose d'une collection d'objets sous forme de deux listes `valeurs` et `poids` représentant respectivement leurs valeurs et leurs poids, supposés entiers. On cherche à remplir un sac à dos de manière optimale sans dépasser le poids maximal qu'il peut contenir. Ce poids maximal sera donné par un entier `poids_max`.

Pour cela, à chaque étape, on met dans le sac à dos l'objet ayant le meilleur ratio valeur/poids parmi les objets ayant un poids inférieur à ce qu'il est encore possible de mettre dans le sac à dos. On représente cette sélection par une liste de 0 et de 1 selon que les objets sont choisis ou non.

a) Supposons qu'on a défini les variables suivantes.

× `valeurs = [126, 32, 20, 5, 18, 80]`

× `poids = [14, 2, 5, 1, 6, 9]`

× `poids_max = 15`

Vérifier alors que la sélection `[0, 1, 0, 1, 0, 1]` est valide. Est-elle optimale ?

b) (*) Écrire une fonction `objets_disponibles` qui prend en paramètres la liste `poids` des poids de tous les objets, un entier `capacite` correspondant à la charge maximale et une liste `selection` telle que définie précédemment, et qui renvoie la liste des objets qui n'ont pas déjà été sélectionnés et dont le poids est inférieur ou égal à la capacité.

c) (*) Écrire une fonction `choix_objet` qui prend en paramètres les listes `valeurs`, `poids` et `objets`, et qui renvoie un élément de la liste d'entiers `objets` donnant un ratio valeur/poids maximal.

d) Écrire une fonction `sac_a_dos` qui prend en paramètres les listes `valeurs` et `poids`, et l'entier naturel `poids_max`, et qui renvoie, sous forme de liste, la sélection d'objets obtenue par stratégie gloutonne.

Exercice 2

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de u_0.

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et positive.

3. Montrer que pour tout réel $a \geqslant 0$: $\sqrt{a} \leqslant \dfrac{1}{2}(1+a)$.

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n} \;\leqslant\; u_n \;\leqslant\; n + \frac{u_0}{2^n}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Justifier : $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

6. ***a)*** Démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_n)^2}{n} = 1$.
On pourra utiliser la question précédente ainsi que la relation qui définit u_n en fonction de u_{n-1}.

b) En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

7. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \sqrt{n}$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \;=\; \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

8. Démontrer : $u_n + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

9. Établir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 3

Dans tout le problème, μ désignera une application continue sur $\mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution du problème de Cauchy :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} y'' + y & = & \mu(x) \quad (E) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Partie I

Dans cette partie **uniquement**, on se place dans le cas particulier où μ est la fonction sin.

1. Résoudre alors l'équation (E).

2. Expliciter la fonction φ.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\varphi(t)\ dt$.

- ***a)*** Justifier : $\mathrm{e}^{in\pi} = (-1)^n$.
- ***b)*** Démontrer : $\displaystyle\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\sin(t)\ dt = \frac{1-(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}$.
  On pourra penser à utiliser une partie imaginaire.
- ***c)*** Démontrer : $\displaystyle\int_0^{n\pi} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\cos(t)\ dt = -\frac{n\pi\,(-1)^n\,\mathrm{e}^{-n\pi}}{2}$.
  On pourra penser à utiliser une partie réelle puis intégrer par parties.
- ***d)*** En déduire : $I_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi - 1)\,(-1)^n$.

4. ***a)*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n\right| \leqslant n\pi\mathrm{e}^{-n\pi}$.

- ***b)*** En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi}\,(n\pi-1)\,(-1)^n = 0$.
- ***c)*** Conclure quant à la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général d'une fonction μ, continue sur $\mathbb{R}$, quelconque. On définit alors :

$$G : x \mapsto \int_0^x \mu(t)\,\cos(t)\ dt \quad \text{et} \quad H : x \mapsto \int_0^x \mu(t)\,\sin(t)\ dt$$

5. On note F la fonction définie par :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)\,G(x) - \cos(x)\,H(x) \end{array}$$

- ***a)*** Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ***b)*** Déterminer F'.
- ***c)*** À l'aide de la question précédente, démontrer que la fonction F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ***d)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) + F(x) = \mu(x)$.
- ***e)*** En déduire : $F = \varphi$.

Partie III

Dans cette dernière partie, on suppose que μ est définie par $\mu : x \mapsto \big|\sin(x)\big|$.
On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t} \big|\sin(t)\big| \, dt \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-t} F(t) \, dt$$

où la fonction F a été définie et étudiée dans la partie précédente.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-t} \big|\sin(t)\big| \, dt$.

- ***a)*** Calculer v_0.
- ***b)*** Montrer qu'il existe un réel $q > 0$ (que l'on explicitera) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = q^n \, v_0$.
  On pourra utiliser le changement de variable $x = t - n\pi$.
- ***c)*** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.
- ***d)*** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de J_n.
- ***e)*** Conclure quant à la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n en fonction de J_n et des quantités :

$$\alpha_n = \mathrm{e}^{-n\pi} F(n\pi) \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \mathrm{e}^{-n\pi} F'(n\pi)$$

- ***b)*** On **admet** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big|F(n\pi)\big| \leqslant 2n\pi$. Justifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
  On pourrait également montrer, mais on l'admettra également aujourd'hui : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.
- ***c)*** En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.