DS4

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 3. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' + 2x\,y \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée (H) $y' + 2x\,y = 0$.
  On remarque que :
  × l'équation $y' + 2x\,y = 0$ est linéaire homogène d'ordre 1,
  × une primitive de la fonction $t \mapsto 2x$ est $t \mapsto x^2$.
  L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :
  $$\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On applique la méthode de variation de la constante.
  Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note alors $h : x \mapsto \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$. La fonction h est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
  × Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$h'(x) \;=\; \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} + \lambda(x) \times (-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}) \;=\; \big(\lambda'(x) - 2x\,\lambda(x)\big)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$
  × Ainsi :
  $$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E) \;&\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{R},\; h'(x) + 2x\,h(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{R},\; \big(\lambda'(x) - \cancel{2x\,\lambda(x)}\big)\,\mathrm{e}^{-x^2} + \cancel{2x\,\lambda(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}} = x\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{R},\; \lambda'(x)\,\cancel{\mathrm{e}^{-x^2}} = x\,\cancel{\mathrm{e}^{-x^2}} \qquad \textit{(car : } \forall x \in \mathbb{R},\; e^{-x^2} \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\; \forall x \in \mathbb{R},\; \lambda'(x) = x \end{aligned}$$
  On en déduit que la fonction λ cherchée peut être choisie parmi les primitives de $x \mapsto x$.
  La fonction $\lambda : x \mapsto \dfrac{1}{2}\,x^2$ convient.
  Ainsi, la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

□

2. On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{ \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

Démonstration.
L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) **Séparation** :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = 0 \ \Leftrightarrow\ f = 0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}$$

2) **Homogénéité** :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in E, \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty \ = \ |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

3) **Inégalité triangulaire** :
$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \|f+g\|_\infty \ \leqslant\ \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que, pour tout $f \in E$, la quantité $\|f\|_\infty$ est bien définie.
  En effet, comme f est bornée, alors $|f|$ est majorée. Ainsi l'ensemble $A_f = \{ \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\}$ est non vide et majoré. On en déduit que $\sup(A_f)$ existe.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
  On commence par remarquer que $\lambda \cdot f \in E$. Ainsi $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est bien définie.
  Deux cas se présentent.
  - Si $\lambda = 0$, alors :
    × d'une part : $\|0 \cdot f\|_\infty = \|0_{\mathbb{R}^{[0,1]}}\| = 0$ (d'après ***1.***)
    × d'autre part : $|0| \times \|f\|_\infty = 0$.
    L'égalité souhaitée est donc vraie pour $\lambda = 0$.
  - Si $\lambda \neq 0$. Soit $x \in [0,1]$. On remarque tout d'abord :
    $$\left|\lambda \times f(x)\right| \ = \ |\lambda| \times \left|f(x)\right| \qquad (*)$$
    On procède ensuite par double inégalité.
    ($\leqslant$) Le réel $\|f\|_\infty$ est un majorant de A_f. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:
    $$\left|f(x)\right| \ \leqslant\ \|f\|_\infty$$
    Comme $|\lambda| \geqslant 0$, on en déduit :
    $$\underbrace{|\lambda| \times \left|f(x)\right|}_{=\left|\lambda \times f(x)\right|} \ \leqslant\ |\lambda| \times \|f\|_\infty$$
    D'où :
    $$\forall x \in [0,1], \quad \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| \ \leqslant\ |\lambda| \times \|f\|_\infty$$
    Ainsi, $|\lambda|\ \|f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$.
    Or $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de $A_{\lambda \cdot f}$.
    $$\boxed{\text{On en conclut : } \|\lambda \cdot f\|_\infty \ \leqslant\ |\lambda|\ \|f\|_\infty.}$$

($\geqslant$) Le réel $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de $A_{\lambda \cdot f}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \left|(\lambda \cdot f)(x)\right| & \leqslant & \|\lambda \cdot f\|_\infty \\ & & \shortparallel & & \\ |\lambda| \times \left|f(x)\right| & = & \left|\lambda \times f(x)\right| & & \end{array}$$

Comme $|\lambda| > 0$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|f(x)\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

Ainsi, $\dfrac{1}{|\lambda|} \|\lambda \cdot f\|_\infty$ est un majorant de A_f.
Or $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorants de A_f. On en conclut :

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

$\boxed{\text{Comme } |\lambda| > 0\text{, on obtient : } |\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda \cdot f\|_\infty.}$

$\boxed{\text{Finalement, } \|\cdot\|_\infty \text{ est bien homogène.}}$

□

Exercice 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) \ = \ \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Démonstration.

- Déterminons $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \ = \ +\infty$$
  - × Par composition de limites :
  $$\lim_{x \to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \ = \ \lim_{u \to +\infty} \exp(u) \ = \ +\infty$$
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.}$$
- Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
  - × Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2$. De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \ = \ +\infty$$
  - × Par composition de limites :
  $$\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \ = \ \lim_{u \to +\infty} \exp(u) \ = \ +\infty$$
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.}$$

□

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) \ = \ \ln(x) + 2x - 1$$

a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$$h'(x) \ = \ \frac{1}{x} + 2 \ > \ 0 \quad \textit{(car } x > 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Démonstration.

- La fonction h est :
  × continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$),
  × strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question précédente.
  Ainsi h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h\big(]0, +\infty[\big)$.
  $$h\big(]0, +\infty[\big) \;=\; \left] \lim_{x \to 0^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x) \right[\;=]-\infty, +\infty[$$
  Or $0 \in\,]-\infty, +\infty[$.
  $$\boxed{\text{L'équation } h(x) = 0 \text{ admet donc une unique solution } \alpha \in\,]0, +\infty[.}$$
- Remarquons :
  × $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = -\ln(2) + 1 - 1 = -\ln(2) < 0$,
  × $h(\alpha) = 0$, par définition de α,
  × $h(1) = \cancel{\ln(1)} + 2 \times 1 - 1 = 1 > 0$.
  Ainsi :
  $$h\left(\frac{1}{2}\right) \;<\; h(\alpha) \;<\; h(1)$$
  Or, d'après le théorème de la bijection, $h^{-1} :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$. En appliquant h^{-1} à l'encadrement précédent, on obtient alors :
  $$\begin{array}{ccccc} h^{-1}\left(h\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) & < & h^{-1}\big(h(\alpha)\big) & < & h^{-1}\big(h(1)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{2} & & \alpha & & 1 \end{array}$$
  $$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{2} < \alpha < 1.}$$
  □

c) Démontrer : $\forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\, h(x)\, g(x)$.

Démonstration.

- La fonction g est dériable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
  × $g_1 : x \mapsto \left(2 - \dfrac{1}{x}\right) \ln(x)$ qui est :
    - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$,
    - telle que : $g_1(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$.
  × $g_2 : x \mapsto e^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  $$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & g_1'(x) \times g_2'\big(g_1(x)\big) \\ & = & \left(\dfrac{1}{x^2} \times \ln(x) + \left(2 - \dfrac{1}{x}\right) \times \dfrac{1}{x}\right) \times \exp\left(\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\ & = & \left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) g(x) \\ & = & \dfrac{\ln(x) + 2x - 1}{x^2}\ g(x) \\ & = & \dfrac{h(x)}{x^2}\ g(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\ h(x)\, g(x)}$$

□

d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudions le signe de $g'(x)$.
  - × Tout d'abord : $\dfrac{1}{x^2} > 0$.
  - × Ensuite : $g(x) = \exp\left(\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) \ln(x)\right) > 0$.
  - × Enfin, d'après les questions ***2.a)*** et ***2.b***), on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction h.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de h	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	‖ $+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

□

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \;=\; g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et : $u_n > 0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: u_n existe et $u_n > 0$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$).
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
    Or la fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $g(u_n)$ est bien définie.
    On en déduit que $u_{n+1} = g(u_n)$ existe.
  - De plus :
  $$u_{n+1} \;=\; g(u_n) \;=\; \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) \;>\; 0$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et : } u_n > 0.}$$

□

5. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$ `u0`.

Démonstration.
On commence par coder la fonction g.

```python
import numpy as np
def g(x) :
    y = np.exp( (2 - 1/x) * np.log(x) )
    return y
```

On propose ensuite la fonction **Python** suivante.

```python
def Prem_Suite_u(u0, n) :
    L = [0]*(n+1)
    L[0] = u0
    for i in range(n) :
        L[i+1] = g(L[i])
    return L
```

Détaillons les éléments de ce $2^{\text{ème}}$ script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `Prem_Suite_u`,
  × elle prend en paramètre les variables `u0` et `n`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `L`.

```
1  def Prem_Suite_u(u0, n) :
```

```
6      return L
```

On initialise ensuite la variable `L` à la liste de taille $\texttt{n}+1$ ne contenant que des 0. C'est cette variable qui contiendra les $\texttt{n}+1$ premiers termes de la suite (u_n).

```
2      L = [0]*(n+1)
```

On stocke ensuite dans l'élément d'indice 0 de la variable `L`, la valeur de u_0.

```
3      L[0] = u0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 4 à 5 consistent à mettre à jour la variable `L` pour que ses éléments contiennent les termes successifs de la suite (u_n). Pour cela on met en place une structure itérative (boucle `for`). À chaque itération, on met à jour un élément de `L` avec le précédent à l'aide de la relation de récurrence définissant la suite (u_n).

```
4      for i in range(n) :
5          L[i+1] = g(L[i])
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `L` contient les $\texttt{n}+1$ premiers termes de la suite (u_n).

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Python**. Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on avait souhaité coder une fonction qui renvoie seulement le terme d'indice n terme de la suite (u_n), on aurait modifié le script précédent de la façon suivante :

```
des Suite_u(u0, n) :
    u = u0
    for k in range(n) :
        u = g(u)
    return u
```

□

6. a) Étudier le signe de $(x-1)\ \ln(x)$ pour $x > 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Deux cas se présentent.

- si $x \leqslant 1$, alors :
  - $\times$ d'une part : $x - 1 \leqslant 0$,
  - $\times$ d'autre part, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(x) \leqslant 0$.

  On en déduit : $(x-1)\ \ln(x) \geqslant 0$.
- si $x > 1$, alors :
  - $\times$ d'une part : $x - 1 > 0$,
  - $\times$ d'autre part, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(x) > 0$.

  On en déduit : $(x-1)\ \ln(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (x-1)\ \ln(x) \geqslant 0.}$$

□

b) Démontrer : $\forall x > 0,\ \dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{x} &= \frac{\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)}{x} \\
&= \frac{\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)}{\exp\big(\ln(x)\big)} \\
&= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) - \ln(x)\right) \\
&= \exp\left(\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x-1}{x}\ \ln(x)\right)
\end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente : $(x-1)\ \ln(x) \geqslant 0$. De plus : $x > 0$. Ainsi :

$$\frac{x-1}{x}\ \ln(x) \ \geqslant\ 0$$

  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\exp\left(\dfrac{x-1}{x}\ \ln(x)\right) & \geqslant & e^0 \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\dfrac{g(x)}{x} & & 1
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{g(x)}{x} \geqslant 1}$$

□

c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente : $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.
  Or : $x > 0$. Donc : $g(x) \geqslant x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) \geqslant x}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcll} g(x) = x & \Leftrightarrow & \dfrac{g(x)}{x} = 1 & \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \exp\left(\dfrac{x-1}{x}\ \ln(x)\right) = 1 & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{x-1}{x}\ \ln(x) = 0 & \\ & \Leftrightarrow & (x-1)\ \ln(x) = 0 & \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x - 1 = 0 \ \texttt{OU} \ \ln(x) = 0 & \\ & \Leftrightarrow & x = 1 \ \texttt{OU} \ x = 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = x \text{ admet donc 1 comme unique solution sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \geqslant x$.
- Or, d'après la question ***4.*** : $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à $x = u_n$. On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} g(u_n) & \geqslant & u_n \\ \shortparallel & & \\ u_{n+1} & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

□

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

▸ **Initialisation** :
D'après l'hypothèse de l'énoncé pour cette question ***8.*** : $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$).
  - Tout d'abord, par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
    Or, la suite (u_n) est croissante d'après ***7***. Ainsi, par transitivité :
    $$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$$
  - Démontrons ensuite : $u_{n+1} \leqslant 1$, c'est-à-dire $g(u_n) \leqslant 1$.
    La question ***2.d)*** nous fournit les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (par hypothèse de récurrence) et $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (d'après ***2.b)***), deux cas se présentent :
    × si $u_n \in \left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$:
    $$\begin{array}{rcccccl} & \dfrac{1}{2} & \leqslant & u_n & \leqslant & \alpha & \\ \text{donc} & g\left(\dfrac{1}{2}\right) & \geqslant & g(u_n) & \geqslant & g(\alpha) & \begin{array}{l}\textit{(par décroissance}\\ \textit{de } g \textit{ sur } \left[\frac{1}{2}, \alpha\right]\textit{)}\end{array} \end{array}$$
    Or :
    $$g\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \exp\left((2-2) \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \exp(0) = 1$$
    Ainsi : $1 \geqslant g(u_n)$.
    × si $u_n \in [\alpha, 1]$:
    $$\begin{array}{rcccccl} & \alpha & \leqslant & u_n & \leqslant & 1 & \\ \text{donc} & g(\alpha) & \leqslant & g(u_n) & \leqslant & g(1) & \begin{array}{l}\textit{(par croissance}\\ \textit{de } g \textit{ sur } [\alpha, 1]\textit{)}\end{array} \end{array}$$
    Or :
    $$g(1) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{1}\right) \ln(1)\right)) = \exp(0) = 1$$
    Ainsi : $g(u_n) \leqslant 1$.
    Finalement, on a toujours : $g(u_n) \leqslant 1$. Autrement dit : $u_{n+1} \leqslant 1$.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  × croissante,
  × majorée par 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \ell \text{ telle que : } \ell \leqslant 1.}$$

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Par passage à la limite dans cet encadrement, on obtient : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \ell \in [\tfrac{1}{2}, 1].}$$

- On sait :
  - × par définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$,
  - × la fonction g est continue en $\ell \in [\frac{1}{2}, 1] \subset \mathbb{R}_+^*$.

  Ainsi, par passage à la limite, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & g(u_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty} \downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty} \downarrow \\ \ell & & g(\ell) \end{array}$$

  On en déduit que ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$.
  Or, d'après la question ***6.c)***, cette équation admet 1 pour unique solution. Comme $\ell \in [\frac{1}{2}, 1]$, on en déduit : $\ell = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement, la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$$

□

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 > 1$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 1$.

- ▶ **Initialisation** :
  D'après l'hypothèse de l'énoncé pour cette question ***9.*** : $u_0 > 1$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 1$)
  Par hypothèse de récurrence : $u_n > 1$.
  Or la suite (u_n) est croissante d'après **7**. Ainsi, par transitivité :

$$u_{n+1} \geqslant u_n > 1$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1.}$$

□

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- D'après la question ***7.***, la suite (u_n) est croissante. Deux cas se présentent alors :
  - × soit elle est majorée. Dans ce cas, la suite (u_n) est convergente.
  - × soit elle n'est pas majorée. Dans ce cas, (u_n) diverge vers $+\infty$.

  Démontrons qu'on est dans le second cas.
- Pour ce faire, on procède par l'absurde. Supposons alors que la suite (u_n) est majorée.
  - × La suite (u_n) est donc :
    - croissante,
    - majorée.

    Elle est donc convergente de limite L.

× Comme la suite (u_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $L \geqslant u_0$.
Or dans cette question : $u_0 > 1$. Ainsi, par transitivité : $L \geqslant u_0 > 1$.

× On sait de plus :
- par définition de la suite (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$,
- la fonction g est continue en $L \in \,]1, +\infty[\, \subset \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, par passage à la limite, on obtient : $L = g(L)$.
On en déduit que L est solution de l'équation $g(x) = x$.
Or, d'après ***6.c)***, cette équation admet 1 pour unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Absurde ! (car $L > 1$)

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ n'est donc pas majorée.}}$$

- Finalement, la suite (u_n) est :
  × croissante,
  × non majorée.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande ici la nature d'une suite **croissante**. Il faut donc tout de suite penser au théorème de convergence monotone (*cf* début de démonstration).
  Le réflexe, pour montrer la divergence, est donc de raisonner par l'absurde en supposant que la suite est majorée (et non en supposant qu'elle est convergente).
- De manière générale, il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  × montrer qu'une suite `N'`est `PAS` majorée,
  × montrer qu'une matrice n'admettant qu'une seule valeur propre `N'`est `PAS` diagonalisable.

□

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Démonstration.

- Avec l'hypothèse faite dans cette question :

$$\begin{array}{lcccl} & u_0 & < & \dfrac{1}{2} & \\ \text{donc} & g(u_0) & > & g\left(\dfrac{1}{2}\right) & \textit{(par stricte décroissance de } g \textit{ sur }]0, \tfrac{1}{2}]) \\ \text{d'où} & u_1 & > & 1 & \textit{(d'après un calcul effectué en } \textbf{\textit{8.a)}}) \end{array}$$

  Comme la suite (u_n) est croissante d'après ***7.***, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 1.}$$

- En effectuant exactement la même démonstration qu'en question ***9.b)***, on peut donc conclure que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

□

Exercice 3

Partie I - Étude d'une suite implicite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$$

1. Rappeler le domaine de définition, de dérivabilité et la valeur de la dérivée de la fonction tan sur son domaine de dérivabilité.

Démonstration.

La fonction tan est dériable (et donc définie) sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right[$. De plus :

$$\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right[, \ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

□

2. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, les limites de tan en $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+$ et $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-$.
(On pensera à exploiter la périodicité de tan*)*

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, avec le changement de variable $\boxed{t = x - n\,\pi}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} \tan(x) &= \lim_{t\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(t+n\pi) \\
&= \lim_{t\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(t) \qquad \textit{(par } \pi\textit{-périodicité de } \tan\textit{)} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} \tan(x) = -\infty}$$

- Ensuite, toujours avec le changement de variable $\boxed{t = x - n\,\pi}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} \tan(x) &= \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(t+n\pi) \\
&= \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(t) \qquad \textit{(par } \pi\textit{-périodicité de } \tan\textit{)} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} \tan(x) = +\infty}$$

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le tableau des variations sur I_n, en justifiant les limites aux bornes, de la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur I_n car elle est la somme $f = f_1 + f_2$ de :
  × $f_1 = \tan$ qui est dérivable sur I_n d'après la question ***1.***,
  × $f_2 : x \mapsto x$ sui est dérivable sur I_n en tant que fonction polynomiale.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable sur } I_n.}$$

- Soit $x \in I_n$. D'après ***1.*** :

$$f'(x) \ = \ \tan'(x) - 1 \ = \ \cancel{1} + \tan^2(x) - \cancel{1} \ = \ \tan^2(x) \ \geqslant \ 0$$

  Notons que l'on a même : $\forall x \in I_n \setminus \{n\pi\}$, $f'(x) > 0$. De plus : $f'(n\pi) = 0$.
- On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\frac{\pi}{2} + n\pi$		$\frac{\pi}{2} + n\pi$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	‖
Variations de f	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  × Tout d'abord, d'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} \tan(x) = -\infty$.

  Or : $\displaystyle\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} x = -\frac{\pi}{2} + n\pi$. On en déduit :

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} f(x) \ = \ -\infty$$

  × Ensuite, toujours d'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} \tan(x) = +\infty$.

  Or : $\displaystyle\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. On en déduit :

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} f(x) \ = \ +\infty$$

□

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n$ tel que : $\tan(x_n) - x_n = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, la fonction f est :
× continue (car dérivable) sur I_n,
× strictement croissante sur I_n.
Elle réalise donc une bijection de I_n sur $f(I_n)$.

D'après la question précédente :

$$f(I_n) \;=\; \left]\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+} f(x), \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-} f(x)\right[\;=\;]-\infty,+\infty[$$

Or : $0 \in]-\infty,+\infty[$. Ainsi 0 admet un unique antécédent par f dans I_n.
L'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution.

$$\boxed{\text{Autrement dit, il existe un unique réel } x_n \in I_n \text{ tel que : } \tan(x_n) - x_n = 0.}$$

□

5. Déterminer la valeur de x_0.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le réel x_0 est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ sur $]-\frac{\pi}{2}+0\times\pi, \frac{\pi}{2}+0\times\pi[\;=\;]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
- On cherche donc un réel $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que : $\tan(x)=x$.
  Or on remarque : $\tan(0)=0$.

$$\boxed{\text{Comme le réel } x_0 \text{ est unique, on en déduit : } x_0 = 0.}$$

□

6. Montrer que (x_n) est strictement croissante.
(on pourra écrire des encadrements pour x_n et x_{n+1})

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :
  × par définition de x_n :
  $$x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$$
  × par définition de x_{n+1} :
  $$x_{n+1} \in \left]-\frac{\pi}{2}+(n+1)\,\pi, \frac{\pi}{2}+(n+1)\,\pi\right[$$
  Or :
  $$-\frac{\pi}{2}+(n+1)\,\pi \;=\; -\frac{\pi}{2}+n\,\pi+\pi \;=\; \frac{\pi}{2}+n\,\pi$$
  Ainsi : $x_{n+1} \in \left]\frac{\pi}{2}+n\,\pi, \frac{\pi}{2}+(n+1)\,\pi\right[$.
- On obtient :
  $$x_n \;<\; \frac{\pi}{2}+n\,\pi \;<\; x_{n+1}$$

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est donc strictement croissante.}}$$

□

7. Déterminer la limite de (x_n).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Toujours par définition de x_n :

$$-\frac{\pi}{2} + n\,\pi \ < \ x_n$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ -\dfrac{\pi}{2} + n\,\pi = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison, on en déduit : } \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty.}$$

□

8. Montrer que $(x_n - n\pi)$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \tan(x_n - n\,\pi) & = & \tan(x_n) & \textit{(par } \pi\textit{-périodicité de } \tan\textit{)} \\ & = & x_n & \textit{(par définition de } x_n\textit{)} \end{array}$$

- Pour que l'égalité $\arctan\big(\tan(x_n - n\pi)\big) = x_n - n\pi$ soit bien vérifiée, il faut : $x_n - n\,\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
En effet, la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.
On vérifie :

$$\begin{array}{rcccc} & -\frac{\pi}{2} + n\,\pi & < & x_n & < & \frac{\pi}{2} + n\,\pi \\ \text{donc} & -\frac{\pi}{2} & < & x_n - n\,\pi & < & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

- On en déduit, puisque $\tan(x_n - n\,\pi) = x_n$:

$$x_n - n\,\pi \ = \ \arctan(x_n)$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ d'après la question précédente. Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n - n\,\pi \ = \ \lim_{n \to +\infty} \arctan(x_n) \ = \ \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) \ = \ \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n - n\,\pi = \frac{\pi}{2}.}$$

□

On a ainsi démontré :

$$x_n \ = \ n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

Partie II - Informatique

9. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant n\,\pi$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque :
- × d'une part : $f(x_n) = 0$ (par définition de x_n,
- × d'autre part : $f(n\pi) = \tan(n\pi) - n\pi = \tan(0) - n\pi = -n\pi$.

On obtient :
$$f(x_n) \ \geqslant\ f(n\pi) \qquad (*)$$
On sait donc :
- × $x_n \in I_n$ et $n\pi \in I_n$,
- × la fonction f réalise une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$ d'après la question ***4.***

La réciproque de cette dernière bijection, définie sur I_n et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car de même monotonie que f.
En l'appliquant de part et d'autre de l'inégalité $(*)$, on obtient :
$$x_n \ \geqslant\ n\pi$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant n\pi.}$$
□

On admet qu'il existe un réel $\ell_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ tel que :
$$n\pi \ \leqslant\ x_n \ \leqslant\ \ell_n$$

10. $(*)$ Écrire une fonction **Python**, nommée `dichotomie`, qui prend en paramètre en entier `n` et un réel `eps` strictement positif, et qui renvoie une valeur approchée de $x_{\mathtt{n}}$ à `eps` près.
On proposera un algorithme impératif.

Démonstration.
Commençons par rappeler le cadre de la recherche par dichotomie.

> *Calcul approché d'un zéro d'une fonction par dichotomie*
> **Données** :
> - × une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
> - × un intervalle de recherche $[a, b]$,
> - × une précision de recherche ε.
>
> **Résultat** : une valeur approchée à ε près d'un zéro (sur l'intervalle $[a, b]$) de la fonction f.
> Autrement dit, une valeur approchée (à ε près) d'un réel $x \in [a, b]$ tel que : $f(x) = 0$.

- La dichotomie est une méthode itérative dont le principe, comme son nom l'indique, est de découper à chaque itération l'intervalle de recherche en deux nouveaux intervalles. L'intervalle de recherche est découpé en son milieu. On obtient deux nouveaux intervalles :
  - × un intervalle dans lequel on sait que l'on va trouver un zéro de f.
    Cet intervalle est conservé pour l'itération suivante.
  - × un intervalle dans lequel ne se trouve pas forcément un zéro de f.
    Cet intervalle n'est pas conservé dans la suite de l'algorithme.

  La largeur de l'intervalle de recherche est ainsi divisée par 2 à chaque itération.
  On itère jusqu'à obtenir un intervalle I contenant un zéro de f et de largeur plus faible que ε.
  Les points de cet intervalle I sont tous de bonnes approximations du zéro contenu dans I.

- C'est le **théorème des valeurs intermédiaires** qui permet de choisir l'intervalle qu'il faut garder à chaque étape. Rappelons son énoncé et précisons maintenant l'algorithme :

Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'**intervalle** $[a, b]$.

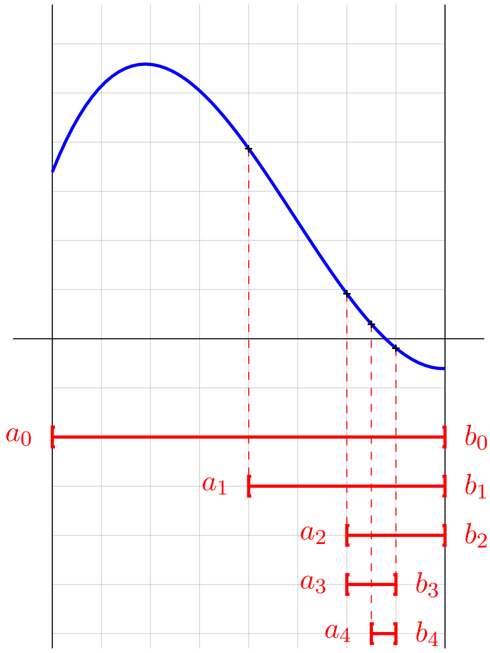
Supposons : $f(a)\ f(b) \leqslant 0$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Calcul des suites (a_m), (b_m), (c_m)

Cas $f(a) \geqslant 0$ et $f(b) \leqslant 0$

- Initialement, $a_0 = a$, $b_0 = b$
- À chaque tour de boucle (tant que $b_m - a_m > \varepsilon$) :
  - $\times$ $c_m = \dfrac{a_m + b_m}{2}$ (point milieu de $[a_m, b_m]$)
  - $\times$ si $f(c_m) \geqslant 0$ alors :
    - $*$ $a_{m+1} = c_m$
    - $*$ $b_{m+1} = b_m$
  - $\times$ si $f(c_m) < 0$ alors :
    - $*$ $a_{m+1} = a_m$
    - $*$ $b_{m+1} = c_m$



- On construit ainsi une suite $\big([a_m, b_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés :
  $\times$ contenant tous un zéro de f,
  $\times$ dont la largeur est divisée par deux d'un rang au suivant.
- Il reste enfin à adapter cet algorithme à l'énoncé.
  Soit $n \geqslant \mathbb{N}$. On cherche une valeur de $x \in [n\pi, b_n]$ telle que :

$$f(x) = 0$$

On se fixe initialement l'intervalle de recherche $[n\pi, \ell_n]$ de sorte que l'équation $f(x) = 0$ ne possède qu'une solution, à savoir la valeur x_n qu'on cherche à approcher. D'un point de vue informatique, on crée des variables `a` et `b` destinées à contenir les valeurs succesives de a_m et b_m. Ces variables sont initialisées respectivement à $n\pi$ et ℓ_n.

```
    a = n * np.pi
    b = l_n
```

On procède alors de manière itérative, tant que l'intervalle de recherche n'est pas de largeur plus faible que la précision `eps` escomptée.

```
    while (b-a) > eps :
```

On commence par définir le point milieu du segment de recherche.

```
        c = (a+b) / 2
```

Puis on teste si $f(\texttt{c}) < 0$.
Si c'est le cas, la recherche s'effectue dans le demi-segment de droite.

```
        if np.tan(c) - c < 0 :
          a = c
```

Sinon, elle s'effectue dans le demi-segment de gauche.

```python
    else :
        b = c
```

En sortie de boucle, on est assuré que le segment de recherche, mis à jour au fur et à mesure de l'algorithme, est de largeur plus faible que `eps` et contient un zéro de f. Tout point de cet intervalle est donc une valeur approchée à `eps` près de ce zéro.
On peut alors choisir de renvoyer le point le plus à gauche du segment.

```python
    return a
```

On peut tout aussi bien choisir le point le plus à droite :

```python
    return b
```

Ou encore le point milieu :

```python
    return (a+b)/2
```

Ce dernier choix présente un avantage : tout point (dont le zéro recherché) du dernier intervalle de recherche se situe à une distance d'au plus $\frac{\texttt{eps}}{2}$ de ce point milieu.
On obtient ainsi une valeur approchée à $\frac{\texttt{eps}}{2}$ du zéro recherché.

- On obtient le programme complet suivant.

```python
import numpy as np

def approx_x(n, eps) :
    a = n * np.pi
    b = l_n
    while (b-a) > eps :
        c = (a+b)/2
        if np.tan(c) - c < 0 :
            a = c
        else :
            b = c
    return (a+b)/2
```

□

11. (∗) Proposer une version récursive de l'algorithme précédent.

Démonstration.
On propose le script suivant.

```python
def approx_x(a, b, n, eps) :
    g = a
    d = b
    c = (g+d)/2
    if (d-g) <= eps :
        return (g+d)/2
    if np.tan(c) - c < 0 :
        return approx_x( c, b, n, eps )
    else :
        return approx_x( a, c, n, eps )
```

□

12. a) Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $p \in \mathbb{N}$: $\dfrac{\ell_n - n\pi}{2^p} \leqslant \varepsilon$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\ell_n - n\pi}{2^p} \leqslant \varepsilon & \Leftrightarrow & \ell_n - n\pi \leqslant \varepsilon\, 2^p & \textit{(car : } 2^p > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{\ell_n - n\pi}{\varepsilon} \leqslant 2^p & \textit{(car : } \varepsilon > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(\dfrac{\ell_n - n\pi}{\varepsilon}\right) \leqslant p\, \ln(2) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \leqslant p & \textit{(car : } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

L'inéquation étudiée admet donc pour solution tous les entiers supérieurs ou égaux à $\dfrac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $\left[\!\left[\left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \right\rceil, +\infty \right[\!\right[$. □

b) $(*)$ Quelle est la complexité de l'algorithme dichotomique présentée en question ***10.*** ? Justifier.

Démonstration.
Connaître la complexité de l'algorithme présenté en question ***10.*** revient à se demander combien de tours de boucle sont nécessaires pour obtenir le résultat. Pour le déterminer, il suffit d'avoir en tête les éléments suivants :

× l'intervalle de recherche initial $[n\pi, \ell_n]$ est de largeur $\ell_n - n\pi$.

× la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque tour de boucle.
À la fin du $p^{\text{ème}}$ tour de boucle, l'intervalle de recherche est donc de largeur $\dfrac{\ell_n - n\pi}{2^p}$.

× l'algorithme s'arrête lorsque l'intervalle devient de largeur plus faible que `eps`.

On obtient le nombre d'itérations nécessaires en procédant par équivalence :

$$\frac{\ell_n - n\pi}{2^m} \leqslant \texttt{eps} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\texttt{eps}}\right)}{\ln(2)} \leqslant p \qquad \textit{(d'après la question précédente}$$

Ainsi : $\left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\texttt{eps}}\right)}{\ln(2)} \right\rceil$ tours de boucle suffisent.

La complexité de l'algorithme est donc $\left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{\ell_n - n\pi}{\texttt{eps}}\right)}{\ln(2)} \right\rceil$. Il s'agit d'une complexité logarithmique en la longueur de l'intervalle. □

Exercice 4

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n \; = \; \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{1+t}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_n \text{ est donc bien définie.}}$$

□

2. Calculer I_0 et I_1.

Démonstration.

- D'une part :

$$I_0 \; = \; \int_0^1 \frac{t^0}{1+t} \, dt \; = \; \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, dt \; = \; \Big[\, \ln\big(|1+t|\big) \, \Big]_0^1 \; = \; \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } I_0 = \ln(2).}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} I_1 \; &= \; \int_0^1 \frac{t^1}{1+t} \, dt \\ &= \; \int_0^1 \frac{(1+t)-1}{1+t} \, dt \\ &= \; \int_0^1 \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} \, dt \\ &= \; \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} \, dt \\ &= \; \int_0^1 1 \, dt - I_0 \\ &= \; [\, t \,]_0^1 - I_0 \\ &= \; 1 - 0 - I_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln(2).}$$

□

3. ***a)*** En effectuant le changement de variable $y = 1 + t$, démontrer :

$$I_2 \; = \; \int_1^2 \; y - 2 + \frac{1}{y} \; dy$$

Démonstration.
On sait : $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \; \frac{t^2}{1+t} \; dt$.
On effectue le changement de variable : $\boxed{\; y = 1 + t \;}$.

$$\left|\begin{array}{l} y = 1 + t \Leftrightarrow y - 1 = t \\ \hookrightarrow dy = \; dt \\ \bullet \; t = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y = 1 \\ \bullet \; t = 1 \;\; \Rightarrow \;\; y = 2 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : y \mapsto y - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_2 \; &= \; \int_1^2 \; \frac{(y-1)^2}{y} \; dy \\ &= \; \int_1^2 \; \frac{y^2 - 2y + 1}{y} \; dy \\ &= \; \int_1^2 \; \frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}} - 2\,\frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} + \frac{1}{y} \; dy \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_2 = \int_1^2 \; y - 2 + \frac{1}{y} \; dy}$$

□

b) En déduire la valeur de I_2.

Démonstration. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} I_2 \; &= \; \int_1^2 \; y - 2 + \frac{1}{y} \; dy \\ &= \; \left[\; \frac{1}{2} \, y^2 - 2\,y + \ln\big(|y|\big) \; dy \; \right]_1^2 \\ &= \; \left(\frac{1}{\cancel{2}} \, 2^{\cancel{2}} - 2 \times 2 + \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{2} \, 1^2 - 2 \times 1 + \cancel{\ln(1)}\right) \\ &= \; \cancel{2} - \cancel{4} + \ln(2) - \frac{1}{2} + \cancel{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } I_2 = \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

□

4. Démontrer, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k \ = \ \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
La suite $\big((-t)^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-t$. Comme $-t \neq 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k \ = \ \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}.}$$

□

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \ dt \ = \ \int_0^1 \frac{1}{1+t} \ dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \ dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k \ = \ \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, t^k \ = \ \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1} \, \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

En intégrant cette égalité sur le segment $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, t^k \ dt \quad = \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1} \, \frac{t^{n+1}}{1+t} \right) \ dt$$

donc $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \ dt \quad = \quad \int_0^1 \frac{1}{1+t} \ dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \ dt$ *(par linéarité de l'intégrale)*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k \ dt \ = \ \int_0^1 \frac{1}{1+t} \ dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \ dt}$$

□

6. Conclure, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ \ln(2) - (-1)^{n+1} \, I_{n+1}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^k \ dt \ = \ \left[\frac{1}{k+1} \ t^{k+1} \right]_0^1 \ = \ \frac{1}{k+1}$$

- Ensuite, d'après ***2.*** :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt \;=\; I_0 \;=\; \ln(2)$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k\, dt & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt & - & \displaystyle(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} & = & \ln(2) & - & (-1)^{n+1}\, I_{n+1}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1}\, I_{n+1}}$$

□

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}$.

Démonstration.
Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{array}{lcccccl}
 & 0 & \leqslant & t & \leqslant & 1 & \\
\text{donc} & 1 & \leqslant & 1+t & \leqslant & 2 & \\
\text{d'où} & 1 & \geqslant & \dfrac{1}{1+t} & \geqslant & \dfrac{1}{2} & \textit{(par décroissance de la fonction } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
\text{alors} & t^{n+1} & \geqslant & \dfrac{t^{n+1}}{1+t} & \geqslant & \dfrac{t^{n+1}}{2} & \textit{(car : } t^{n+1} \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

On obtient, par transitivité :

$$t^{n+1} \;\geqslant\; \frac{t^{n+1}}{1+t} \;\geqslant\; \frac{t^{n+1}}{2} \;\geqslant\; 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}.}$$

□

b) En déduire l'encadrement :

$$0 \;\leqslant\; I_{n+1} \;\leqslant\; \frac{1}{n+2}$$

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \;\leqslant\; \frac{t^{n+1}}{1+t} \;\leqslant\; t^{n+1}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$0 \;\leqslant\; \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt}_{= I_{n+1}} \;\leqslant\; \int_0^1 t^{n+1}\, dt$$

Or :

$$\int_0^1 t^{n+1} \, dt \ = \ \left[\frac{1}{n+2} \ t^{n+2} \right]_0^1 \ = \ \frac{1}{n+2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } 0 \ \leqslant \ I_{n+1} \ \leqslant \ \frac{1}{n+2}.}$$

□

8. Justifier que la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Démonstration.
On sait :

× d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \ \leqslant \ I_{n+1} \ \leqslant \ \frac{1}{n+2}$$

× de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

× enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0.}$$

□

9. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Démonstration.

- D'après la question ***6.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \ = \ \ln(2) - (-1)^{n+1} \ I_{n+1}$$

- Or :

  × d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$.

  × la suite $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

  On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} I_{n+1} = 0$.

- On obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1}\right) \ = \ \ln(2)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (u_n) \text{ est convergente et : } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2).}$$

□