DS4

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 3. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' + 2x\,y \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

2. On note E l'ensemble des fonctions bornées.
Pour tout $f \in E$, on note : $A_f = \{\, \big|f(x)\big| \mid x \in [0,1] \}$.
Pour tout $f \in E$, on note : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \big|f(x)\big| = \sup(A_f)$.

a) Que signifie $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E ?

b) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est homogène.

Exercice 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) \;=\; \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) \;=\; \ln(x) + 2x - 1$$

a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

c) Démontrer : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\, h(x)\, g(x)$.

d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et : $u_n > 0$.

5. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = $ `u0`.

6. ***a)*** Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

b) Démontrer : $\forall x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $u_0 > 1$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose : $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3

Partie I - Étude d'une suite implicite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n \;=\; \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$$

1. Rappeler le domaine de définition, de dérivabilité et la valeur de la dérivée de la fonction tan sur son domaine de dérivabilité.

2. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, les limites de tan en $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+$ et $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-$.
(On pensera à exploiter la périodicité de tan*)*

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le tableau des variations sur I_n, en justifiant les limites aux bornes, de la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n$ tel que : $\tan(x_n) - x_n = 0$.

5. Déterminer la valeur de x_0.

6. Montrer que (x_n) est strictement croissante.
(on pourra écrire des encadrements pour x_n et x_{n+1})

7. Déterminer la limite de (x_n).

8. Montrer que $(x_n - n\pi)$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

On a ainsi démontré :

$$x_n \;=\; n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Partie II - Informatique

9. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant n\,\pi$.

On admet qu'il existe un réel $\ell_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ tel que :

$$n\pi \;\leqslant\; x_n \;\leqslant\; \ell_n$$

10. $(*)$ Écrire une fonction **Python**, nommée `dichotomie`, qui prend en paramètre en entier `n` et un réel `eps` strictement positif, et qui renvoie une valeur approchée de $x_{\mathtt{n}}$ à `eps` près.
On proposera un algorithme impératif.

11. $(*)$ Proposer une version récursive de l'algorithme précédent.

12. ***a)*** Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $p \in \mathbb{N}$: $\dfrac{\ell_n - n\pi}{2^p} \leqslant \varepsilon$.

b) $(*)$ Quelle est la complexité de l'algorithme dichotomique présentée en question ***10.*** ? Justifier.

Exercice 4

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n \;=\; \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.

2. Calculer I_0 et I_1.

3. ***a)*** En effectuant le changement de variable $y = 1+t$, démontrer :

$$I_2 \;=\; \int_1^2 y - 2 + \frac{1}{y}\,dy$$

b) En déduire la valeur de I_2.

4. Démontrer, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k \;=\; \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^k\,dt \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

6. Conclure, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \;=\; \ln(2) - (-1)^{n+1}\, I_{n+1}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}$.

b) En déduire l'encadrement :

$$0 \;\leqslant\; I_{n+1} \;\leqslant\; \frac{1}{n+2}$$

8. Justifier que la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

9. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.