DS2

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 7. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1 : Cours

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$? Le démontrer.

3. $(*)$ On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$$

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

5. ***a)*** Écrire une fonction **Python** calculant le maximum des éléments d'une liste `A`.

b) Modifier la fonction précédente pour qu'elle affiche également la première position de ce maximum dans la liste.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner un encadrement optimal de $\lfloor x \rfloor$.

Exercice 2 : Fonctions hyperboliques et suite récurrente

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{sh}\,(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\,(u_n) \end{cases}$$

Partie I : Étude des fonctions sh et f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\mathrm{sh}\,(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'\,(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$.

4. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$$

Étudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.

5. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On donne :

$$f\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 0.9, \qquad f(1) \simeq 0.85,$$

$$\mathrm{sh}\left(\frac{3}{5}\right) \simeq 0.64, \quad \mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 0.89, \quad \mathrm{sh}(1) \simeq 1.18, \quad \mathrm{sh}\left(\frac{6}{5}\right) \simeq 1.51$$

6. Démontrer : $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

7. $(*)$ En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

8. $(*)$ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
*(on pourra utiliser la question **2.**, sans chercher à déterminer α)*

9. Donner un encadrement de α et justifier :

$$\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right],\ \ \frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)}$$

10. On donne : $\dfrac{h(1)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq -0.47$ et $\dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\mathrm{sh}^2(1)} \simeq -0.13$.
Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

11. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

12. $(*)$ Écrire une fonction en **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie la valeur de $u_{\mathtt{n}}$.

13. ***a)*** Déterminer un entier n_0 à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

b) Déduire de cette inégalité une fonction **Python** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 3 : Fonctions homographiques

On considère la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto \frac{2x-1}{-x+2}$$

1. $(*)$ Démontrer que g est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2. $(*)$ Déterminer le tableau de variations complet de g (limites comprises).

3. $(*)$ Tracer la courbe représentative de g.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $c \neq 0$. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

Une telle fonction est appelée *fonction homographique*. Notons que la fonction g est un cas particulier de fonction homographique avec $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$ et $d = 2$.

4. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ de f en fonction de c et d.

5. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition en fonction de a, b, c et d.

6. Démontrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et montrer que sa dérivée est de la forme :

$$f' : x \mapsto \frac{ad-bc}{h(x)}$$

où h est une fonction que l'on explicitera.

7. Déterminer la monotonie de f. *On distinguera trois cas.*

8. On considère le cas particulier : $ad - bc > 0$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

9. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}, \quad f(x) \ = \ \frac{\alpha}{x-\beta} + \gamma$$

On exprimera α, β et γ en fonction de a, b, c et d.

10. En supposant connue la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x}$, où α est le réel déterminé en question précédente, comment retrouve-t-on la représentation graphique de la question ***8.b)*** ?

Dans toute la fin de l'exercice, on suppose : $ad - bc \neq 0$.

11. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_{a,b,c,d}$. *On exprimera x en fonction de y.*

12. En déduire que f est bijective sur $\mathcal{D}_{a,b,c,d}$ et déterminer sa bijection réciproque.

13. Peut-on répondre à la question ***11.*** lorsque $y = \dfrac{a}{c}$?