DS1

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 10. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. $(*)$ Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

2. $(*)$ Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

3. $(*)$ Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3,+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

8. $(*)$ Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**)

9. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

10. $(*)$ Écrire un programme **Python** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. $(*)$ Tout nombre réel positif est inférieur ou égal à son carré.

2. Tout réel positif de racine carrée supérieure ou égale à 2, est lui-même supérieur ou égal à 4.

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 2$ admet une racine réelle.

4. La suite $(2n - \sqrt{5})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables. Toute réponse devra être justifiée.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^3 \leqslant 3)$ et $\big(|x| \leqslant 3^{\frac{1}{3}}\big)$.

2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Propositions : $(x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0)$ et $(\forall i \in [\![1, n]\!],\, x_i = 0)$

4. Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $(x^2 + y^2 > 1)$ et $\big(|x| > 1 \ \texttt{OU}\ |y| > 1\big)$.

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. $(*)$ Paramètre : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Propositions : $P(x, y) : (x^2 - y^2 = 0)$ et $Q(x, y) : (x = y)$.

2. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c) : \big(|a + b + c| = 0\big)$ et $Q(a, b, c) : (a = b = c = 0)$.

3. Paramètres : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)$: (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a) et $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, a\big)$: $(\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (∗) $5^{3x+4} - 2^{2x-3} = 0$
2. $|x+1| + |2x+1| = 0$
3. $\sqrt{-x^2+x+3} \leqslant 2x+1$
4. (∗) $|3-2x| \geqslant \sqrt{-2x^2+x+1}$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$$

1. (∗) Rappeler l'expression de S_n en fonction de n et la démontrer.

2. En déduire une expression de T_n en fonction de n.

Exercice 7

1. Montrer que la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. Montrer que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, $n!$ est un nombre pair.

On admettra par la suite que pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, $n!$ est un multiple de 3.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $a \leqslant b$.
   a) Exprimer le quotient $\dfrac{b!}{a!}$ comme produit explicite d'entiers naturels.
   b) Que peut-on en déduire sur le réel $\dfrac{b!}{a!}$?
4. Démontrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $b! = c! + 2$.