DS1

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration.
Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont deux fois dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que fonctions usuelles.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$
comme somme de fonctions deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\forall x \in\,]0,+\infty[,\ f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}.}$$

$\square$

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in\,]0,+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$.
  La fonction f' est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$.

  Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$.
- De plus : $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$.

  Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$.
- $f'(1) = \mathrm{e}^1 - \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \cancel{\mathrm{e}} - \cancel{\mathrm{e}} = 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	||	$+$		$+$	
Variations de f'	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Démonstration.

- La fonction f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi :
  - $\times$ $\forall x \in \,]0, 1[, \ f'(x) < f'(1) = 0$.
  - $\times$ $\forall x \in \,]1, +\infty[, \ f'(x) > f'(1) = 0$.

  Donc f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- Déterminons la limite de f en 0. Comme : $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. On écrit :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \ln(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e} \, \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} \right)$$

  Par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.
  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e} \ln(1) = \mathrm{e}$.

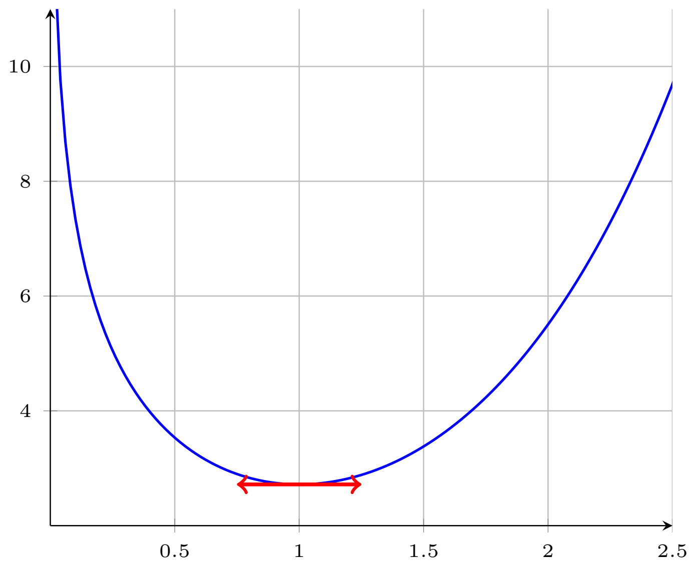
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

□

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.



Commentaire

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut pas oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

□

4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est la somme $f_1 + f_2$ de :
  - × $f_1 = f'$ dérivable sur $]0,+\infty[$ car f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$,
  - × $f_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[.}$$

- Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$u'(x) \;=\; f''(x) - 1 \;=\; \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} - 1 \;=\; \frac{x^2\ \mathrm{e}^x + \mathrm{e} - x^2}{x^2} \;=\; \frac{x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}}{x^2}$$

  Comme $x^2 > 0$, on en déduit que le signe de $u'(x)$ est celui de $x^2\ (\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}$.
  Or :
  × comme $x > 0$, alors : $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1$. Ainsi : $\mathrm{e}^x - 1 > 0$.
  × de plus : $x^2 > 0$ et $\mathrm{e} > 0$.
  On en déduit : $u'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est donc strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

- D'après ***1.b)*** : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.
  D'où : $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = -\infty$.
- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$u(x) \;=\; \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - x \;=\; \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$$

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
  D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	‖	$+$
Variations de u	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

□

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, soit $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = x \;\Leftrightarrow\; f'(x) - x = 0 \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0$$

On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est :
  - × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***4.a)***),
  - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Ainsi la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty|)$.

$$u(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 0} u(x), \lim_{x \to +\infty} u(x) \right[=] - \infty, +\infty[$$

Or $0 \in] - \infty, +\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f'(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

- Tout d'abord :
  - × $u(\alpha) = 0$
  - × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
  - × $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 2 > 0$

    En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :
    - d'une part : $7,3 < e^2 < 7,4$. Donc : $5,3 < e^2 - 2 < 5,4$
    - d'autre part : $2,7 < e < 2,8$. Donc : $1,35 < \dfrac{e}{2} < 1,4$. D'où : $-1,4 < -\dfrac{e}{2} < -1,35$

    Ainsi : $3,9 < e^2 - 2 - \dfrac{e}{2} < 4,05$. On en conclut : $u(2) > 3,9 > 0$.

  On en déduit :

$$u(1) \;<\; u(\alpha) \;<\; u(2)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, $u^{-1} :] - \infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$. En appliquant u^{-1}, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} u^{-1}\big(u(1)\big) & < & u^{-1}\big(u(\alpha)\big) & < & u^{-1}\big(u(e)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 1 & & \alpha & & e \end{array}$$

$$\boxed{1 < \alpha < 2}$$

□

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geqslant 2$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geqslant 2$).
  Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
  - La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.
    Or $u_n \geqslant 2$, donc $u_n \in\ ]0, +\infty[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
  - D'après la question ***2.***, e est le minimum de f sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire :
    $$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant \mathrm{e}$$
    En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in\ ]0, +\infty[$, on obtient :
    $$u_{n+1} \geqslant \mathrm{e} > 2$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2.}$$ □

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{lcl} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $[2, +\infty[$ car elle est la somme $g_1 + g_2$ de :
  × $g_1 = f$ dérivable (car deux fois dérivable d'après ***1.a)***) sur $]0, +\infty[$,x donc sur $[2, +\infty[$,
  × $g_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $[2, , +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } [2, +\infty[.}$$

- Soit $x \in [2, +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  D'après la question ***1.b)***, la fonction f' est croissante sur $[2, +\infty[\ \subset\ ]0, +\infty[$. Ainsi :
  $$f'(x) \ \geqslant\ f'(2)$$
  Or, avec les encadrements donnés par l'énoncé : $f'(2) = \mathrm{e}^2 - \dfrac{\mathrm{e}}{2} \geqslant 7,3 - 1,4 = 5,9 > 1$.
  On en déduit : $f'(x) > 1$. D'où : $g'(x) > 0$.
  On obtient le tableau de variations suivant :

x	2 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$g(2)$ ↗ $+\infty$

- Déterminons maintenant le signe de g. Comme g est croissante sur $[2, +\infty[$, on a :

$$\forall x \geqslant 2, \quad g(x) \geqslant g(2)$$

Il suffit alors de démontrer : $g(2) > 0$ pour pouvoir conclure. Calculons :

$$g(2) \;=\; f(2) - 2 \;=\; \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2$$

D'après les encadrements de l'énoncé :
× d'une part : $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$
× d'autre part : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$ et $0,6 < \ln(2) < 0,7$. D'où :

$$\underbrace{2,7 \times 0,6}_{=\,1,62} \;<\; \mathrm{e}\ln(2) \;<\; \underbrace{2,8 \times 0,7}_{=\,1,96}$$

Ainsi : $-1,96 < -\mathrm{e}\ln(2) < -1,62$.
On en déduit : $g(2) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 \;>\; 7,3 - 1,96 - 2 = 3,34$.
On obtient alors : $g(2) > 0$.

$$\boxed{\forall x \in [2, +\infty[,\ g(x) > 0}$$

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. Autrement dit, pour tout $x \geqslant 2$:

$$f(x) > x$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geqslant 2$ (question ***5.***), on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$$

□

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

Démonstration.

- On sait que la suite (u_n) est croissante (d'après la question ***6.b)***). Deux cas se présentent alors :
× soit (u_n) est de plus majorée, et alors elle converge.
× soit (u_n) n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.
- Démontrons par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.
Supposons que la suite (u_n) est majorée.
× Dans ce cas, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers un réel ℓ.
D'après la question ***5.*** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant 2$.
× D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
La fonction f est continue sur $[2, +\infty[$, elle est donc en particulier continue en ℓ. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient : $\ell = f(\ell)$, *i.e.* $g(\ell) = 0$.

Absurde ! En effet, d'après la question ***6.a)*** : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) > 0$. En particulier : $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée et diverge donc vers } +\infty}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,

× montrer qu'un réel `N`'est `PAS` rationnel.

□

8. $(*)$ Écrire une fonction **Python** `Entier_tq`, prenant en paramètre un réel A, et renvoyant un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

Démonstration.
On propose le script suivant :

```
1  import numpy as np
2  def Entier_tq(A) :
3      N = 0
4      u = 2
5      while u < A :
6          N = N + 1
7          u = np.exp(u) - np.e * np.log(u)
8      return N
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `Entier_tq`,
  × elle prend en paramètre la variable `A`,
  × elle admet pour variable de sortie la variable `N`.

```
2  def Entier_tq(A) :
```

```
8      return N
```

  On initialise ensuite la variable `N` à 0.

```
3  N = 0
```

  La variable `u` qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 2 : la valeur de u_0.

```
4  u = 2
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 5 à 7 consistent à :
  1) déterminer un entier n tel que : $u_n \geqslant A$,
  2) calculer les valeurs succesives de u_n.

On doit donc :

1) incrémenter la variable `N` de 1 jusqu'à ce que : $u_n \geqslant A$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `N` de 1 tant que : $u_n < A$. Pour cela on met en place une structure while :

```
    while u < A :
```

Puis on met à jour la variable `N`.

```
        N = N + 1
```

2) calculer les valeurs successives de u_n :

```
        u = np.exp(u) - np.e * np.log(u)
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `N` contient le premier entier n tel que : $u_n \geqslant A$. On finit donc ce script en renvoyant la valeur de cette variable.

```
    return N
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un script **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

$\square$

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son cosinus.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante : } \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant \cos(x).}$$

$$\boxed{\text{Sa négation est : } \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 > \cos(x_0).}$$

Étudions la véracité de la proposition ***1.***
En choisissant $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, on remarque : $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi : $x_0 > \cos(x_0)$.
On en déduit que la négation de la proposition ***1.*** est vraie.

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{1.}} \text{ est donc fausse.}}$$

Commentaire

On démontre ici que la négation de la proposition ***1.*** est vraie. Cette négation est une proposition quantifiée existentiellement. Il faut donc exhiber un objet vérifiant cette proposition pour conclure quant à sa véracité.

$\square$

2. $(*)$ Tout réel de carré strictement supérieur à 4 est lui-même strictement supérieur à 2.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante : } \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 > 4) \ \Rightarrow\ (x > 2).}$$

$$\boxed{\text{Sa négation est : } \exists x_0 \in \mathbb{R},\ (x^2 > 4) \ \texttt{ET} \ (x \leqslant 2).}$$

Étudions la véracité de la proposition ***2.***
En choisissant $x_0 = -3$, on remarque : $x_0^2 = (-3)^2 = 9 > 4 \quad \texttt{ET} \quad x_0 = -3 \leqslant 2$.
On en déduit que la négation de la proposition ***2.*** est vraie.

$$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{2.}} \text{ est donc fausse.}}$$

Commentaire

- On rappelle : $x^2 > 4 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad x > 2$.
  En toute généralité, comme $\sqrt{x^2} = |x|$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a :
  $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 > 4 \ \Rightarrow\ |x| > 2)}$$
- L'implication ci-dessus est même une équivalence :
  $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 > 4 \ \Leftrightarrow\ |x| > 2)}$$
  C'est elle qui permet de nous orienter quant à la recherche d'un contre-exemple. On constate qu'ici, tout $x_0 < -2$ constituerait un contre-exemple valide à la proposition ***2.***

$\square$

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

$\boxed{\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante : } \exists a_0 \in \mathbb{R},\ z^2 - 3z + 3 = (z - a_0)^2}$

$\boxed{\text{Sa négation est : } \forall a \in \mathbb{R},\ z^2 - 3z + 3 \neq (z - a)^2.}$

Étudions la véracité de la proposition ***3.***
On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 - 3X + 3$. Alors :

$$\Delta \ = \ (-3)^3 - 4 \times 1 \times 3 \ = \ 9 - 12 \ < \ 0$$

Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ n'admet donc aucune racine réelle. En particulier, il n'admet pas de racine double.

$\boxed{\text{La proposition } \textbf{\textit{3.}} \text{ est donc fausse.}}$ □

4. Toute suite d'entiers est majorée.

Démonstration.

$\boxed{\text{Cette proposition s'écrit de la façon suivante : } \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ \exists M_0 \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M_0.}$

$\boxed{\text{Sa négation est : } \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ \forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ |u_{n_0}| > M.}$

Étudions la véracité de la proposition ***4.***
En choisissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

× est une suite d'entiers,

× n'est pas majorée car : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\boxed{\text{On en déduit que la proposition } \textbf{\textit{4.}} \text{ est fausse.}}$ □

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^2 > 5)$ et $\left(|x| > \sqrt{5}\right)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$: $x^2 > 5 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \sqrt{5}$.

$$\boxed{\text{Les deux propositions sont donc équivalentes pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

□

2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

Démonstration.

- En choisissant $x_0 = -2$, on remarque que :
  - × la proposition $(x_0 < 1)$ est vraie : $x_0 = -2 < 1$.
  - × la proposition $(x_0^2 < x_0)$ est fausse : $x_0^2 = (-2)^2 = 4 \geqslant -2$.

$$\boxed{\text{Comme ces deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité pour chaque valeur de } x \in \mathbb{R}, \text{ elles ne sont pas équivalentes.}}$$

Commentaire

- Comme souvent, il est possible de trouver un contre-exemple même sans la moindre inspiration. Pour cela, on peut commencer par chercher à démontrer l'équivalence entre les deux propositions.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  - × si $x > 0$, alors :
  $$x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \times x < 1 \times x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < x$$
  Les deux propositions sont donc équivalentes lorsque x est strictement positif.
  - × si $x = 0$, alors :
    - la proposition $(x < 1)$ est vraie. En effet : $0 < 1$.
    - la proposition $(x^2 < x)$ est fausse. En effet : $0^2 = 0 \not< 0$.

    Le réel 0 constitue donc un contre-exemple à l'équivalence des deux propositions.
  - × si $x < 0$, alors :
    - la proposition $(x < 1)$ est toujours vraie. En effet, par transitivité :
    $$x \ < \ 0 \ < \ 1$$
    - la proposition $(x^2 < x)$ est fausse. En effet :
    $$x^2 < x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x} > \frac{x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$
    Cette dernière assertion est fausse car $x < 0$. Par raisonnement par équivalence, la première aussi.

    Finalement, tout réel x négatif ou nul constitue donc un contre-exemple à l'équivalence des deux propositions.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × L'implication suivante est fausse : $(x < 1) \Rightarrow (x^2 < x)$.
  En effet, en reprenant le point précédent, pour $x_0 = -2$:
    ▶ $(x < 1)$ est vraie,
    ▶ $(x^2 < x)$ est fausse.
  Or l'assertion (`VRAI` $\Rightarrow$ `FAUX`) est fausse.
  × Démontrons : $(x^2 < x) \Rightarrow (x < 1)$.
  Supposons : $x^2 < x$. Alors :

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 - x & < & 0 \\ \text{donc} & x(x-1) & < & 0 \end{array}$$

  Or on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  On en déduit : $0 < x < 1$. En particulier : $x < 1$.

□

3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^n$.
Propositions : $(x_1 + \cdots + x_n \leqslant n^2)$ et $\big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant n\big)$.

Démonstration.

- En choisissant $n = 2 \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = 4 \in \mathbb{R}_+$ et $x_2 = 0 \in \mathbb{R}_+$, on remarque que :
  × la proposition $(x_1 + x_2 \leqslant 2^2)$ est vraie : $x_1 + x_2 = 4 = 2^2 \leqslant 2^2$.
  × la proposition $\big(\forall i \in [\![1, 2]\!],\ x_i \leqslant 2\big)$ est fausse : $x_1 = 4 > 2$.

  Comme ces deux propositions n'ont pas la même valeur de vérité pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^n$, elles ne sont pas équivalentes.

Commentaire

- Lorsqu'on souhaite trouver un contre-exemple, on cherche toujours à ce qu'il soit le plus simple possible. Pour cette question, on va donc essayer de trouver un contre-exemple pour de très petites valeurs de n.
- On commence par étudier le cas $n = 1$.
  Il faudrait trouver $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel qu'exactement l'une des propositions suivantes soit vraie :

$$\begin{array}{ccc} (x_1 \leqslant 1^2) & & \big(\forall i \in [\![1, 1]\!],\ x_i \leqslant 1\big) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ (x_1 \leqslant 1) & & (x_1 \leqslant 1) \end{array}$$

  Il n'est donc pas possible de trouver de contre-exemple dans le cas $n = 1$ puisque les deux assertions sont bien équivalentes.
  On se place alors dans le cas $n = 2$ pour notre recherche de contre-exemple.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^n$.
  × L'implication suivante est fausse : $(x_1 + \cdots + x_n \leqslant n) \;\Rightarrow\; \big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant n\big)$.
  En effet, en reprenant le point précédent, pour $n = 2$, $x_1 = 4$ et $x_2 = 0$:
  - $(x_1 + x_2 \leqslant 2^2)$ est vraie,
  - $\big(\forall i \in [\![1, 2]\!],\ x_i \leqslant 2\big)$ est fausse.

  Or l'assertion (`VRAI` $\Rightarrow$ `FAUX`) est fausse.
  × Démontrons : $\big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant n\big) \;\Rightarrow\; (x_1 + \cdots + x_n \leqslant n^2)$.
  Supposons : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \leqslant n$. Alors, en sommant ces inégalités pour i variant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{n} n \;=\; n \sum_{i=1}^{n} 1 \;=\; n \times n \;=\; n^2$$

□

4. Paramètre : une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Propositions : (f est croissante sur $\mathbb{R}$) et $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$.

Démonstration.

- En choisissant $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$, on remarque :
  × la proposition (f est croissante sur $\mathbb{R}$) est fausse :

$$\frac{1}{4} \;\leqslant\; 1 \qquad \text{mais} \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) \;>\; f(1)$$

  En effet :
  - d'une part : $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \sin\left(2\pi\ \dfrac{1}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
  - d'autre part : $f(1) = \sin(2\pi \times 1) = \sin(2\pi) = 0$.

  × la proposition $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$ est vraie. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sin\big(2\pi(x+1)\big) \\ &= \sin(2\pi x + 2\pi) \\ &= \sin(2\pi x) && \textit{(car la fonction } \sin \textit{ est } 2\pi\textit{-périodique)} \\ &= f(x) \;\geqslant\; f(x) \end{aligned}$$

Commentaire

- Rappelons la définition de (la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \leqslant y) \;\Rightarrow\; \big(f(x) \leqslant f(y)\big)}$$

  Comme la variable y est quantifiée universellement, on peut choisir $y = x+1$, ce qui fournit la propriété $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$ (on détaille ce point dans la suite de la question).
  Puisqu'on vient de remarquer rapidement :

$$(f \text{ croissante sur } \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$$

  on sait qu'il faut chercher un contre-exemple à la réciproque de cette implication.

Commentaire

- Lorsqu'on souhaite trouver un contre-exemple, on cherche toujours à ce qu'il soit le plus simple possible. Pour cette question, on essaie de trouver un contre-exemple à l'aide d'une fonction usuelle.
  Rappelons que, d'après le point précédent, on cherche une fonction f qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ mais qui vérifie $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$.
- La proposition $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$ n'est pas très éloignée de la proposition $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\big)$, *i.e.* de la définition de (f est 1-périodique).
  À défaut d'avoir à portée de main des fonctions 1-périodiques, le cours comporte des exemples de fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. C'est le cas des fonctions sin et cos.
  Il reste alors à effectuer une transformation de l'une de ces deux fonctions pour la rendre 1-périodique sur $\mathbb{R}$. C'est l'intérêt de la composition par l'homothétie $x \mapsto 2\pi x$.
  On pose alors :
  $$f : x \mapsto \sin(2\pi x) \qquad \text{ou} \qquad g : x \mapsto \cos(2\pi x)$$
  Notons que, comme ces deux fonctions sont périodiques sur $\mathbb{R}$, elles ne sont en particulier pas croissantes sur $\mathbb{R}$. Elles constituent donc bien des contre-exemples adaptés à la question.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  × Démontrons : (f croissante sur $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$.
  Supposons que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \leqslant y) \ \Rightarrow\ \big(f(x) \leqslant f(y)\big)$$
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :
  $$\begin{array}{rccl} & x & \leqslant & x+1 \\ \text{donc} & f(x) & \leqslant & f(x+1) \quad \textit{(par croissance de } f \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$
  (il s'agit ici d'utiliser l'implication : $\Big((x \leqslant y) \ \Rightarrow\ \big(f(x) \leqslant f(y)\big)\Big)$ *lorsque* $y = x+1$*)*
  × L'implication suivante est fausse : $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big) \ \Rightarrow\ $ (f est croissante sur $\mathbb{R}$).
  En effet, en reprenant le premier point, pour $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$:
  - $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$ est vraie,
  - (f est croissante sur $\mathbb{R}$) est fausse.

  Or l'assertion (`VRAI` $\Rightarrow$ `FAUX`) est fausse.

□

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. $(*)$ Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x)$: $(x \geqslant 0)$ et $Q(x)$: $(x \geqslant 1)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- L'implication $\big(P(x) \;\Rightarrow\; Q(x)\big)$ est fausse.
  En effet, en choisissant $x_0 = 0$, on obtient :
  × d'une part : $x_0 = 0 \geqslant 0$,
  × d'autre part : $x_0 = 0 < 1$.
  Ainsi x_0 vérifie $P(x_0)$ `ET` `NON`$(Q(x_0))$.

  $$\boxed{\text{La proposition } Q(x) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P(x).}$$

- Supposons $Q(x)$: $x \geqslant 1$.
  Alors, par transitivité : $x \;\geqslant\; 1 \geqslant\; 0$.
  D'où $P(x)$.

  $$\boxed{\text{La proposition } Q(x) \text{ est donc une condition suffisante à } P(x).}$$

□

2. Paramètre : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $P(a, b)$: $\big((a + b)^2 = a^2 + b^2\big)$ et $Q(a, b)$: $(a = b = 0)$.

Démonstration.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- L'implication $\big(P(a, b) \;\Rightarrow\; Q(a, b)\big)$ est fausse.
  En effet, en choisissant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on obtient :
  × d'une part : $(a_0 + b_0)^2 = (1 + 0)^2 = 1$.
  De plus : $a_0^2 + b_0^2 = 1^2 + 0^2 = 1$.
  Ainsi : $(a_0 + b_0)^2 = a_0^2 + b_0^2$.
  × d'autre part : $a_0 \neq 0$.
  Ainsi le couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $P(a_0, b_0)$ `ET` `NON`$(Q(a_0, b_0))$.

  $$\boxed{\text{La proposition } Q(a, b) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P(a, b).}$$

- Supposons $Q(a, b)$: $a = b = 0$. Alors :
  × d'une part : $(a + b)^2 = (0 + 0)^2 = 0^2 = 0$,
  × d'autre part : $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.
  D'où $P(a, b)$.

  $$\boxed{\text{La proposition } Q(a, b) \text{ est donc une condition suffisante à } P(a, b).}$$

Commentaire

- Si les deux propositions de l'énoncé ne sont pas équivalentes, les deux suivantes le sont pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^3$:
  - × $P(a, b)$: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
  - × $q(a, b)$: $a = 0$ OU $b = 0$
    (alors que dans l'énoncé $Q(a, b)$: $a = 0$ ET $b = 0$)
- En effet, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} P(a,b) & \Leftrightarrow & (a+b)^2 = a^2 + b^2 \\ & \Leftrightarrow & \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} \\ & \Leftrightarrow & 2ab = 0 \\ & \Leftrightarrow & a = 0 \ \texttt{OU} \ b = 0 \\ & \Leftrightarrow & q(a,b) \end{array}$$

□

3. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c)$: $\big(|a + b + c| = 0\big)$ et $Q(a, b, c)$: $\big(|a + b| + |c| = 0\big)$.

Démonstration.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- L'implication $\big(P(a, b, c) \ \Rightarrow \ Q(a, b, c)\big)$ est fausse.
  En effet, en choisissant $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = -1$, on obtient :
  - × d'une part : $|a_0 + b_0 + c_0| = |1 + 0 - 1| = |0| = 0$.
  - × d'autre part : $|a_0 + b_0| + |c_0| = |1 + 0| + | - 1| = 1 + 1 = 2 \neq 0$.

  Ainsi le triplet (a_0, b_0, c_0) vérifie $P(a_0, b_0, c_0)$ ET NON$(Q(a_0, b_0, c_0))$.

  $$\boxed{\text{La proposition } Q(a,b,c) \text{ n'est donc pas une condition nécessaire à } P(a,b,c).}$$

- Supposons $Q(a, b, c)$: $|a + b| + |c| = 0$.
  Le réel $|a + b| + |c|$ est donc une somme nulle de deux termes positifs. On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & |a+b| = 0 \ \texttt{ET} \ |c| = 0 \\ \text{donc} & |a+b| = 0 \ \texttt{ET} \ c = 0 \end{array}$$

  On obtient alors :

$$|a+b+c| \ = \ |a+b+0| \ = \ |a+b| \ = \ 0$$

  D'où $P(a, b, c)$.

  $$\boxed{\text{La proposition } Q(a,b,c) \text{ est donc une condition suffisante à } P(a,b,c).}$$

□

4. Paramètre : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Propositions : $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: $\big(\forall N \in \mathbb{N}^*,\ (u_1-u_0)\,(u_2-u_1)\cdots(u_N-u_{N-1})>0\big)$ et $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: $\big($la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante$\big)$.

Démonstration.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Supposons $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: $\big(\forall N \in \mathbb{N}^*,\ (u_1-u_0)\,(u_2-u_1)\cdots(u_N-u_{N-1})>0\big)$.
  Démontrons par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1}-u_n>0$.
  - **Initialisation**
    D'après $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ appliquée en $N=1$, on sait : $u_1-u_0>0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}$.
    Supposons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$. Et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2}-u_{n+1}>0$).
    - Par hypothèse de récurrence : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u_{k+1}-u_k>0$.
      En multipliant ces inégalité pour k variant de 0 à n, on obtient :
      $$\prod_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) \ > \ 0 \qquad (\star)$$
    - Par ailleurs, d'après $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ appliquée à $N=n+2$, on sait :
      $$\prod_{i=1}^{n+2}(u_i-u_{i-1}) \ > \ 0$$
      Avec le décalage d'indice $k=i-1$, on obtient :
      $$\prod_{k=0}^{n+1}(u_{k+1}-u_k) \ > \ 0$$
      Ainsi :
      $$\left(\prod_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)\right)\times(u_{n+2}-u_{n+1}) \ > \ 0$$
    - On en déduit, en utilisant $(\star)$: $u_{n+2}-u_{n+1}>0$.

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence forte : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
  D'où $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

La proposition $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est donc une condition nécessaire à $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

- Supposons $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
  Alors : $\forall i\in\mathbb{N}$, $u_{i+1}-u_i>0$.
  Soit $N\in\mathbb{N}^*$. En multipliant les inégalités précédentes pour i variant de 0 à $N-1$, on obtient :
  $$\prod_{i=0}^{N-1}(u_{i+1}-u_i) \ > \ 0$$
  Autrement dit :
  $$(u_1-u_0)\cdots(u_N-u_{N-1}) \ > \ 0$$
  D'où $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

La proposition $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est donc une condition suffisante à $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

□

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $(*)$ $x+1 = \sqrt{\dfrac{x}{6}+6}$

2. $\pi^{3x} - 3 \times \pi^x + 2 = 0$

3. $(*)$ $\sqrt{x-1} \leqslant |x| + 1$

4. $|3x^2+2x-1| < |-x^2+2x+3|$

Démonstration.

1. Résolvons l'équation ***(1)***.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(1)}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcl} \text{L'équation } \textbf{\textit{(1)}} \text{ est bien définie} & \Leftrightarrow & \dfrac{x}{6}+6 & \geqslant & 0 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{x}{6} & \geqslant & -6 \\ & \Leftrightarrow & x & \geqslant & -36 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(1)} = [-36, +\infty[.}$$

- Soit $x \in [-36, +\infty[$.
  On procède par disjonction de cas selon le signe de $(x+1)$ (car, comme une racine est toujours positive, on a toujours : $\sqrt{\dfrac{x}{6}+6} \geqslant 0$).
  On remarque :

$$x+1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1$$

Comme $-1 \in [-36, +\infty[$, deux cas se présentent :

× si $x \in [-36, -1[$, alors :
  - d'une part : $x+1 < 0$,
  - d'autre part : $\sqrt{\dfrac{x}{6}+6} \geqslant 0$.

  L'équation ***(1)*** n'admet donc pas de solution sur $[-36, -1[$.

× si $x \geqslant -1$, alors :

$$\begin{array}{rrcl} & x+1 & = & \sqrt{\dfrac{x}{6}+6} \\ \Leftrightarrow & (x+1)^2 & = & \left(\sqrt{\dfrac{x}{6}+6}\right)^2 \quad \textit{(par injectivité de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \Leftrightarrow & x^2+2x+1 & = & \dfrac{x}{6}+6 \\ \Leftrightarrow & 6(x^2+2x+1) & = & 6\left(\dfrac{x}{6}+6\right) \\ \Leftrightarrow & 6x^2+12x+6 & = & x+36 \\ \Leftrightarrow & 6x^2+11x-30 & = & 0 \end{array}$$

On note Δ le discriminant du polynôme $6X^2 + 11X - 30$. Alors :

$$\Delta \;=\; 11^2 - 4 \times 6 \times (-30) \;=\; 121 + 24 \times 30 \;=\; 121 + 720 \;=\; 841$$

Le polynôme $6X^2 + 11X - 30$ admet donc 2 racines réelles, notée x_1 et x_2 :

$$x_1 \;=\; \frac{-11 - \sqrt{841}}{2 \times 6} \;=\; \frac{-11 - 29}{12} \;=\; -\frac{40}{12} \;=\; -\frac{\cancel{4} \times 10}{\cancel{4} \times 3} \;=\; -\frac{10}{3}$$

$$x_2 \;=\; \frac{-11 + \sqrt{841}}{2 \times 6} \;=\; \frac{-11 + 29}{12} \;=\; \frac{18}{12} \;=\; \frac{\cancel{6} \times 3}{\cancel{6} \times 2} \;=\; \frac{3}{2}$$

Or $-\frac{10}{3} < -1$. Comme on se place dans le cas $x \geqslant -1$, on en déduit :

$$6x^2 + 11x - 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Ainsi, l'équation *(1)* admet $\frac{3}{2}$ comme unique solution sur $[-1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } (1) \text{ est donc : } \{\tfrac{3}{2}\}.}$$

Commentaire

On rappelle : $u = v \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad u^2 = v^2$.
En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| = |v| \;\Leftrightarrow\; u^2 = v^2)}$$

C'est pourquoi on procède par disjonction de cas pour résoudre cette inéquation, en fonction du signe des quantités que l'on considère (ici $(x + 1)$ et $\sqrt{\frac{x}{6} + 6}$).

2. Résolvons l'équation *(2)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(2)}$.
  Il n'y a aucun problème de définition dans cette équation.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

  $$\begin{aligned} \pi^{3x} - 3\,\pi^x + 2 \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\pi^x)^3 - 3\,\pi^x + 2 \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y^3 - 3\,y + 2 \;=\; 0 \end{aligned}$$

  (avec le changement de variable $\boxed{y = \pi^x}$*)*

  On remarque que 1 est racine évidente du polynôme $X^3 - 3X + 2$. On en déduit la factorisation :

  $$X^3 - 3X + 2 \;=\; (X - 1)\,(X^2 + X - 2)$$

  On remarque de nouveau que 1 est racine évidente du polynôme $X^2 + X - 2$. On en déduit la factorisation :

  $$X^2 + X - 2 \;=\; (X - 1)\,(X + 2)$$

  Finalement :

  $$X^3 - 3X + 2 \;=\; (X - 1)\,(X - 1)\,(X + 2) \;=\; (X - 1)^2\,(X + 2)$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} y^3-3y+2 = 0 & \Leftrightarrow & (y-1)^2\,(y+2) \;=\; 0 & \\ & \Leftrightarrow & y-1=0 \;\; \texttt{OU} \;\; y+2=0 & \\ & \Leftrightarrow & y=1 \;\; \texttt{OU} \;\; y=-2 & \\ & \Leftrightarrow & \pi^x=1 \;\; \texttt{OU} \;\; \pi^x=-2 & \textit{(car } y=\pi^x\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \pi^x \;=\; 1 & \textit{(car } \pi^x \geqslant 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^{x\ln(\pi)} \;=\; 1 & \\ & \Leftrightarrow & x\,\ln(\pi) \;=\; \ln(1) \;=\; 0 & \textit{(par injectivité de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x \;=\; \dfrac{0}{\ln(\pi)} \;=\; 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } \textit{(2)} \text{ est donc : } \{0\}.}$$

Commentaire

- Revenons sur la factorisation : $X^3-3X+2=(X-1)\,(X^2+X-2)$. Il s'agit en fait d'une identification. Détaillons la.
  Comme le polynôme $P(X)=X^3-3X+2$ de degré 3 admet 1 pour racine évidente, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que :
  $$P(X) \;=\; (X-1)\,Q(X)$$
  Comme Q est de degré 2, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :
  $$Q(X) \;=\; aX^2+bX+c$$
  Alors :
  $$\begin{array}{rcl} P(X) \;=\; (X-1)\,Q(X) & \Longleftrightarrow & X^3-3X+2 \;=\; (X-1)\,(aX^2+bX+c) \\ & \Longleftrightarrow & X^3-3X+2 \;=\; aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c \\ & \Longleftrightarrow & X^3-3X+2 \;=\; aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & & & = & 1 \\ -a & + & b & & & = & 0 \\ & - & b & + & c & = & -3 \\ & & & - & c & = & 2 \end{array}\right. \quad \textit{(par identification des coefficients)} \\ & \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & & & = & 1 \\ & & b & & & = & 1 \\ & - & b & + & c & = & -3 \\ & & & - & c & = & 2 \end{array}\right. \end{array}$$
  On en déduit : $Q(X)=1\times X^2+1\times X-2$. On retrouve alors bien la factorisation :
  $$P(X) \;=\; (X-1)\,(X^2+X-2)$$

Commentaire

- Notons que certains coefficients du polynôme Q pouvait être obtenus avant d'effectuer le moindre calcul.
  - × Tout d'abord, le produit des coefficients dominants de $X-1$ et Q doit être égal au coefficient dominant de P. Autrement dit, avec nos notations : $1 \times a = 1$
    On en déduit que le coefficient dominant de Q est 1.
  - × Ensuite, le produit des des coefficients constants de $X-1$ et Q doit être égal au coefficient constant de P. Autrement dit, avec nos notations : $(-1) \times c = 2$.
    On en déduit que le coefficient dominant de Q est -2.

  À ce stade, on sait, sans avoir fait aucun calcul, que Q s'écrit de la façon suivante :

$$Q(X) \ = \ X^2 + bX - 2$$

  Le seul coefficient à trouver par identification est donc le coefficient b.

3. Résolvons l'inéquation *(3)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(3)}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{L'inéquation } (3) \text{ est bien définie} \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \ \geqslant \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ \geqslant \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[.}$$

- Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x-1} \ \leqslant \ |x| + 1 & \Leftrightarrow & \sqrt{x-1} \ \leqslant \ x+1 & \textit{(car } x \geqslant 1 \geqslant 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \ \leqslant \ (x+1)^2 & \textit{(par stricte croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+ \textit{ (car } x+1 \geqslant 0\textit{))} \\ & \Leftrightarrow & x - 1 \ \leqslant \ x^2 + 2x + 1 & \\ & \Leftrightarrow & 0 \ \leqslant \ x^2 + x + 2 & \end{array}$$

  On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 + X + 2$. Alors :

$$\Delta \ = \ 1^2 - 4 \times 1 \times 2 \ = \ 1 - 8 \ < \ 0$$

  Le polynôme $X^2 + X + 2$ n'admet pas de racine et son coefficient dominant est strictement positif.
  On en déduit que l'assertion $(0 \ \leqslant \ x^2 + x + 2)$ est toujours vraie.
  Par raisonnement par équivalence, la première assertion l'est également.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } (3) \text{ est donc : } \mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[.}$$

4. Résolvons l'inéquation *(4)*.

- Déterminons son ensemble de définition $\mathcal{D}_{(4)}$.
  Il n'y a aucun problème de définition dans cette inéquation.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_{(4)} = \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  On résout l'inéquation *(4)* par disjonction de cas selon le signe des termes $(3x^2+2x-1)$ et $(-x^2+2x+3)$.
  × d'une part, on remarque que -1 est racine évidente du polynôme $3X^2+2X-1$. On en déduit la factorisation :

$$3X^2+2X-1 \;=\; 3\left(X^2+\frac{2}{3}X-\frac{1}{3}\right) \;=\; 3\left(X-(-1)\right)\left(X-\frac{1}{3}\right) \;=\; 3\left(X+1\right)\left(X-\frac{1}{3}\right)$$

  On obtient alors le signe du trinôme $3x^2+2x-1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  × d'autre part, on remarque que -1 est racine évidente du polynôme $-X^2+2X+3$. On en déduit la factorisation :

$$-X^2+2X+3 \;=\; -\left(X^2-2X-3\right) \;=\; -\big(X-(-1)\big)(X-3) \;=\; -(X+1)\,(X-3)$$

  On obtient alors le signe du trinôme $-x^2+2x+3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

  Trois cas se présentent alors :
  × si $x \in \,]-\infty,-1] \cup]3,+\infty[$, alors :
  - d'une part : $3x^2+2x-1 \geqslant 0$,
  - d'autre part : $-x^2+2x+3 \leqslant 0$.

  Ainsi :

$$\begin{aligned}
|3x^2+2x-1| \;<\; |-x^2+2x+3| \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2+2x-1 \;<\; -(-x^2+2x+3) \\
&\Leftrightarrow \quad 3x^2+2x-1+(-x^2+2x+3) \;<\; 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2+4x+2 \;<\; 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,(x^2+2x+1) \;<\; 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2x+1 \;<\; 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \;<\; 0
\end{aligned}$$

  Cette dernière assertion est fausse (un carré est toujours positif ou nul). Par raisonnement par équivalence, la première aussi.
  L'inéquation *(4)* n'admet donc pas de solution sur $]-\infty,-1] \cup]3,+\infty[$.

× si $x \in \,]-1, \frac{1}{3}]$, alors :
- d'une part : $3x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$,
- d'autre part : $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|3x^2 + 2x - 1| \; < \; |-x^2 + 2x + 3| & \Leftrightarrow \; -(3x^2 + 2x - 1) \; < \; -x^2 + 2x + 3 \\
& \Leftrightarrow \; 0 \; < \; (3x^2 + 2x - 1) - x^2 + 2x + 3 \\
& \Leftrightarrow \; 0 \; < \; 2x^2 + 4x + 2 \\
& \Leftrightarrow \; 0 \; < \; 2\,(x^2 + 2x + 1) \\
& \Leftrightarrow \; 0 \; < \; x^2 + 2x + 1 \\
& \Leftrightarrow \; 0 \; < \; (x+1)^2
\end{aligned}$$

Comme $x \neq -1$, alors cette dernière assertion est toujours vraie. En effet, un carré est toujours positif ou nul et :

$$(x+1)^2 \; = \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 \; = \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Par raisonnement par équivalence, la première assertion est également vraie.
L'inéquation *(4)* admet donc pour solution tous les réels de l'intervalle $]-1, \frac{1}{3}]$.

× si $x \in \,]\frac{1}{3}, 3]$, alors :
- d'une part : $3x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$,
- d'autre part : $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
|3x^2 + 2x - 1| \; < \; |-x^2 + 2x + 3| & \Leftrightarrow \; 3x^2 + 2x - 1 \; < \; -x^2 + 2x + 3 \\
& \Leftrightarrow \; 3x^2 + 2x - 1 - (-x^2 + 2x + 3) \; < \; 0 \\
& \Leftrightarrow \; 3x^2 + \cancel{2x} - 1 + x^2 - \cancel{2x} - 3 \; < \; 0 \\
& \Leftrightarrow \; 4x^2 - 4 \; < \; 0 \\
& \Leftrightarrow \; 4(x^2 - 1) \; < \; 0 \\
& \Leftrightarrow \; x^2 - 1 \; < \; 0 \\
& \Leftrightarrow \; (x-1)\,(x+1) \; < \; 0
\end{aligned}$$

On a par ailleurs le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\,(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$(x-1)\,(x+1) \; < \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1, 1[$$

L'inéquation *(4)* admet donc pour solution tous les réels de l'ensemble $]-1, 1[\, \cap \,]\frac{1}{3}, 3] \; = \,]\frac{1}{3}, 1[$.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation *(4)* est : $]-1, \frac{1}{3}] \cup \,]\frac{1}{3}, 1[\, = \,]-1, 1[$. □

Exercice 6

1. Sommes de Mengoli

a) $(*)$ Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,(k+1)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} && \textit{(par télescopage)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.}$$

Commentaire

- Détaillons le télescopage.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} && \textit{(avec le décalage d'indice } i = k+1\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} && \textit{(car } i \textit{ est une variable muette)} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la décomposition :

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

est extrêmement classique et qu'il faut donc la mémoriser.

□

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
En s'inspirant de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)}$.

Commentaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire plus proprement cette somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p} \frac{1}{k+i}\right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)} &= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)\,(k+2)\cdots(k+p)}\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{k+i}\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{j=0}^{p-1} \frac{1}{k+(j+1)}\right) && \textit{(avec le décalage d'indice } j = i-1\textit{)}\\
&= \frac{1}{p}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i}\right) && \textit{(car } j \textit{ est une variable muette)}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i}\right)\\
&= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i}\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i}\right)\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right) - \sum_{j=2}^{n+1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{j+i}\right)\right) && \textit{(avec le décalage d'indice } j = k+1\textit{)}\\
&= \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right) - \sum_{k=2}^{n+1} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right)\right) && \textit{(car } j \textit{ est une variable muette)}\\
&= \frac{1}{p}\left(\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{1+i} + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right)}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right)} + \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i}\right)\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i+1} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i}\right)
\end{aligned}$$

- Enfin, on calcule :

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i+1} &= \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{j} && \textit{(avec le décalage d'indice } j = i+1\textit{)}\\ &= \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{p} j} = \frac{1}{p!}\end{aligned}$$

De plus :

$$\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)}\right).}$$

Commentaire

- On a ici détaillé ce télescopage plus ardu. Toutefois, l'égalité suivante peut suffire à obtenir la totalité des points alloués à ce télescopage.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i}\right) = \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{1+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+i}$$

Il s'agit en effet d'appliquer l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}$$

dans le cas où la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k = \prod\limits_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'égalité :

$$\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+p)}\right)$$

n'est pas classique et n'est donc pas à retenir. Pour en avoir l'idée, on se laisse ici guider par l'énoncé qui nous suggère d'obtenir une égalité similaire à celle de la question précédente.

□

2. **Minimum et maximum**

a) $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) \quad \text{et} \quad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right)$$

- Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \leqslant i}}^{n} \min(i,j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{n} \min(i,j) \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \leqslant i}}^{n} j + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{n} i \\
&= \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i \\
&= \frac{i\,(i+1)}{2} + i \sum_{j=i+1}^{n} 1 \\
&= \frac{i\,(i+1)}{2} + i\,\big(n - (i + \cancel{1}) + \cancel{1}\big) \\
&= \frac{i\,(i+1)}{2} + i\,(n-i) \\
&= \frac{i^2+i}{2} + ni - i^2 \\
&= -\frac{1}{2}\, i^2 + \left(\frac{1}{2} + n\right) i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = -\frac{1}{2}\, i^2 + \frac{2n+1}{2}\, i}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\, i^2 + \frac{2n+1}{2}\, i \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2} \times \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2 \times 2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2 \times \cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.}$$

- Tout d'abord :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \max(i,j)\right)$$

- Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) &= \sum_{\substack{j=1\\ j\leqslant i}}^{n} \max(i,j) + \sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{n} \max(i,j)\\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\leqslant i}}^{n} i + \sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{n} j\\
&= \sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\\
&= i\sum_{j=1}^{i} 1 + \frac{\left(n-(i+\cancel{1})+\cancel{1}\right)\left(n+(i+1)\right)}{2}\\
&= i\times i + \frac{(n-i)\,(n+i+1)}{2}\\
&= i^2 + \frac{n^2+\cancel{in}+n-\cancel{in}-i^2-i}{2}\\
&= \frac{1}{2}\,i^2 - \frac{1}{2}\,i + \frac{n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \frac{1}{2}\,i^2 - \frac{1}{2}\,i + \frac{n\,(n+1)}{2}}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \max(i,j)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,i^2 - \frac{1}{2}\,i + \frac{n\,(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{n\,(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\times\frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{n\,(n+1)}{2}\times n\\
&= \frac{n\,(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} + n\right)\\
&= \frac{n\,(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{3}{6} + \frac{6n}{6}\right)\\
&= \frac{n\,(n+1)}{2}\times\frac{8n-2}{6}\\
&= \frac{n\,(n+1)}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}\,(4n-1)}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}.}$$

□

b) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i+j \ = \ \min(i,j) + \max(i,j)$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (i+j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \big(\min(i,j) + \max(i,j) \big) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) + \sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \right) \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{n\,(n+1)}{6} \big((2n + \cancel{1}) + (4n - \cancel{1}) \big) \\
&= \frac{n\,(n+1)}{\cancel{6}} \times (\cancel{6}\, n)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j) = n^2\,(n+1).}$$

Commentaire

L'énoncé demandait explicitement d'utiliser la question précédente. On peut néanmoins déterminer la valeur de la double somme $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$ sans connaître les deux doubles sommes de la question précédentes. On procèderait de la façon suivante.

- Tout d'abord, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (i+j) &= \sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j \\
&= i \sum_{j=1}^{n} 1 + \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= ni + \frac{n\,(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Commentaire

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (i+j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= n \sum_{i=1}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times n \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} \\
&= n^2(n+1)
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 7

1. $(*)$ Démontrer : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration.
On procède par l'absurde. Supposons : $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ (car $\sqrt{3} \geqslant 0$) tel que :

× d'une part : $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$,

× d'autre part : a et b n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{ccc} \text{comme} & \sqrt{3} & = & \dfrac{a}{b} \\[2ex] \text{alors} & \left(\sqrt{3}\right)^2 & = & \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \\[2ex] \text{donc} & 3 & = & \dfrac{a^2}{b^2} \\[2ex] \text{d'où} & 3b^2 & = & a^2 \end{array}$$

  On en déduit que a^2 est divisible par 3.

- Montrons qu'alors a est divisible par 3.
  On procède par l'absurde une nouvelle fois. Supposons que a n'est pas divisible par 3.
  Deux cas se présentent.

  × Soit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 3k + 1$. Alors :

$$a^2 \;=\; (3k+1)^2 \;=\; 9k^2 + 6k + 1 \;=\; 3\,(3k^2 + 2k) + 1$$

  Il existe donc $k' = 3k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que : $a^2 = 3k' + 1$.
  L'entier a^2 n'est donc pas divisible par 3.
  Absurde !

  × Soit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 3k + 2$. Alors :

$$a^2 \;=\; (3k+2)^2 \;=\; 9k^2 + 12k + 4 \;=\; 9k^2 + 12k + 3 + 1 \;=\; 3\,(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

  Il existe donc $k'' = 3k^2 + 4k + 1 \in \mathbb{N}$ tel que : $a^2 = 3k'' + 1$.
  L'entier a^2 n'est donc pas divisible par 3.
  Absurde !

  On en déduit que a est divisible par 3. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 3k$.

- On obtient :

$$\begin{array}{cccc} \text{puisque} & 3b^2 & = & a^2 \\ \text{alors} & 3b^2 & = & (3k)^2 \\ \text{donc} & 3b^2 & = & 9k^2 \\ \text{d'où} & b^2 & = & 3k^2 \end{array}$$

  On en déduit que b^2 est divisible par 3, et donc b est divisible par 3 par le même raisonnement que pour a.

- On sait donc :
  - × l'entier a est divisible par 3,
  - × l'entier b est divisible par 3.

  Les entiers a et b admettent donc un autre diviseur commun que 1.
  Absure !

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
- × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,
- × montrer qu'un réel `N`'est `PAS` rationnel.

□

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet :
$$(2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad n = 0$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $(2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q}$.
On pourra étudier le produit $(2+\sqrt{3})^n\,(2-\sqrt{3})^n$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$(2+\sqrt{3})^n\,(2-\sqrt{3})^n \;=\; \left((2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})\right)^n \;=\; \left(2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right)^n \;=\; (4-3)^n \;=\; 1^n \;=\; 1$$

- De plus, comme $2+\sqrt{3} \neq 0$, alors : $(2+\sqrt{3})^n \neq 0$. D'où :
$$(2-\sqrt{3})^n \;=\; \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n}$$

- On en déduit :
$$\begin{aligned} (2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(2+\sqrt{3})^n} \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \quad (2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow \quad n = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} : (2-\sqrt{3})^n \in Q \;\Leftrightarrow\; n = 0.}$$

□