# DS1 /135

On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 11. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

## Exercice 1 /38

On considère la fonction $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

### Partie I : Étude de la fonction $f$

*1.* *a)* Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- **1 pt : $f$ deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $\forall x \in ]0,+\infty[,\ f'(x) = \mathbf{e}^x - \dfrac{\mathbf{e}}{x}$**
- **1 pt : $\forall x \in ]0,+\infty[,\ f''(x) = \mathbf{e}^x + \dfrac{\mathbf{e}}{x^2}$**

*b)* Dresser le tableau de variations de $f'$ avec la limite de $f'$ en 0 et la limite de $f'$ en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

- **1 pt : signe de $f''(x)$ et sens de variations de $f'$**
- **1 pt : limite de $f'$ en $+\infty$ et en $0$**
- **1 pt : calcul de $f'(1)$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f''(x)$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| Variations de $f'$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

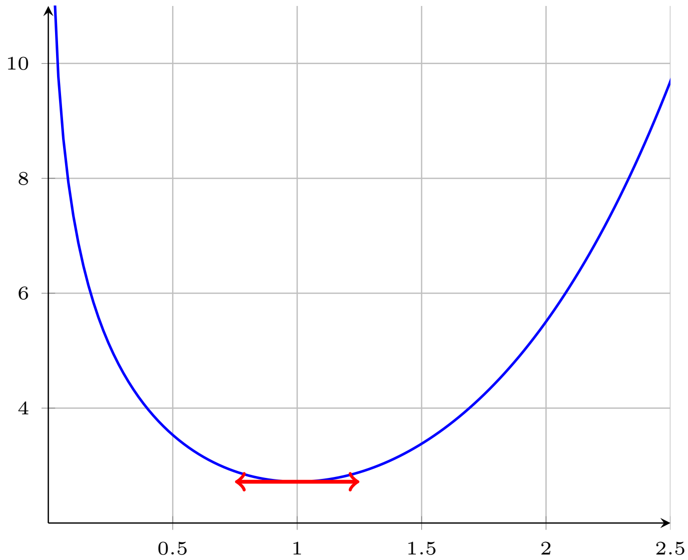
*2.* Dresser le tableau de variations de $f$ avec la limite de $f$ en 0 et la limite de $f$ en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

- **1 pt : signe de $f'(x)$ et sens de variations de $f$**
- **1 pt : limite de $f$ en $+\infty$**
- **1 pt : limite de $f$ en $0$ et : calcul de $f(1)$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\mathrm{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*3.* Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

- **4 pts : tangente, limites, cohérence avec le TV, propreté**




*4.* ***a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \left\{ \begin{array}{rcl} ]0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array} \right.$

- **1 pt :** $u$ **dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \in \, ]0, +\infty[$**,** $u'(x) = \dfrac{x^2 \left(\mathrm{e}^x - 1\right) + \mathrm{e}}{x^2}$
- **1 pt : signe de** $u'(x)$ **et sens de variations de** $u$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $u'(x)$ | \|\| | $+$ |
| Variations de $u$ | \|\| | $-\infty \nearrow +\infty$ |

***b)*** En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in \, ]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\alpha$, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- **1 pt :** $f'(x) = x \Leftrightarrow u(x) = 0$
- **3 pts : théorème de la bijection**
  - × **1 pt : hypothèses**
  - × **1 pt :** $u(\ ]0, +\infty[\ ) = \ ]-\infty, +\infty[$
  - × **1 pt :** $0 \in \ ]-\infty, +\infty[$
- **1 pt :** $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
- **1 pt : application de** $u^{-1} : \ ]-\infty, +\infty[ \to \ ]0, +\infty[$ **strictement croissante sur** $]-\infty, +\infty[$

## Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

***5.*** Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

***6.*** ***a)*** Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{cases} [2,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{cases}$

- **1 pt :** $g$ **dérivable sur** $[2, +\infty[$ **et** $g' : x \mapsto f'(x) - 1$
- **1 pt : signe de** $g'(x)$ **et variations de** $g$

| $x$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| **Signe de** $g'(x)$ | $+$ | |
| **Variations de** $g$ | $g(2)$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

- **1 pt :** $g(2) > 0$

***b)*** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$
- **1 pt : utilisation de :** $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) > x$ **(qst précédente)**

***7.*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **3 pts : raisonnement par l'absurde**
  - × **1 pt : structure du raisonnement**
  - × **1 pt :** $\ell \geqslant 2$ **et** $g(\ell) = 0$
  - × **1 pt : d'après *6.a)*,** $\forall x \geqslant 2$, $g(x) \neq 0$

***8.*** $(*)$ Écrire une fonction **Python**, prenant en paramètre un réel $A$, et renvoyant un entier naturel $N$ tel que $u_N \geqslant A$.

- **1 pt : importation bibliothèque**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : boucle while et contenu**

```python
import numpy as np
def Entier_tq(A) :
    N = 0
    u = 2
    while u < A :
        N = N + 1
        u = np.exp(u) - np.e * np.log(u)
    return N
```

## Exercice 2 /12

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

*1.* Tout nombre réel $x$ est inférieur ou égal à son cosinus.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant \cos(x)$.**
- **1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 > \cos(x_0)$.**
- **1 pt : En choisissant $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, on remarque que la négation de la proposition *1.* est vraie. La proposition *1.* est donc fausse.**

*2.* $(*)$ Tout réel de carré strictement supérieur à 4 est lui-même strictement supérieur à 2.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 > 4) \ \Rightarrow\ (x > 2)$.**
- **1 pt : Sa négation est : $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ (x^2 > 4)\ \ \texttt{ET}\ \ (x \leqslant 2)$.**
- **1 pt : En choisissant $x_0 = -3$, on remarque que la négation de la proposition *1.* est vraie. La proposition *1.* est donc fausse.**

*3.* Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\exists a_0 \in \mathbb{R},\ z^2 - 3z + 3 = (z - a_0)^2$**
- **1 pt : Sa négation est : $\forall a \in \mathbb{R},\ z^2 - 3z + 3 \neq (z - a)^2$.**
- **1 pt : $\Delta < 0$. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ n'admet donc aucune racine réelle. En particlier, il n'admet pas de racine double. La proposition *3.* est donc fausse.**

*4.* Toute suite d'entiers est majorée.

- **1 pt : Cette proposition s'écrit de la façon suivante : $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\exists M_0 \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_0$.**
- **1 pt : Sa négation est : $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\forall M \in \mathbb{R}_+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $|u_{n_0}| > M$.**
- **1 pt : En choisissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n,\ \ldots$**

## Exercice 3 /14

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables.

*1.* Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^2 > 5)$ et $\big(|x| > \sqrt{5}\big)$.

- **1 pt : par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$, …**

*2.* Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

- **1 pt : En choisissant $x_0 = -2$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes.**
- **1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x < 1) \ \Rightarrow\ (x^2 < x)$. En effet, …**
- **2 pts : démonstration de la réciproque (tableau de signes)**
  - × **1 pt : structure de démonstration de l'implication**
  - × **1 pt : reste**

*3.* Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^n$.
Propositions : $(x_1 + \cdots + x_n \leqslant n^2)$ et $\big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant n\big)$.

- **1 pt : en choisissant $n = 2$ et $x_1 = 4$ et $x_2 = 0$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes.**
- **1 pt : L'implication suivante est fausse : $(x_1 + \cdots + x_n \leqslant n) \ \Rightarrow\ \big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant n\big)$. En effet, ...**
- **2 pts : démonstration de la réciproque**
  × **1 pt : structure de démonstration de l'implication**
  × **1 pt : reste**

*4.* Paramètre : une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Propositions : ($f$ est croissante sur $\mathbb{R}$) et $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$.

- **2 pts : En choisissant $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$, on remarque que les deux propositions ne sont pas équivalentes**
  × **1 pt : démonstration de la non croissance**
  × **1 pt : démonstration de la 1-périodicité**
  **Toute réflexion pertinente sera valorisée**
- **2 pts : ($f$ croissante sur $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$**
  × **1 pt : structure de démonstration de l'implication**
  × **1 pt : reste**
- **1 pt : L'implication suivante est fausse : $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big) \ \Rightarrow\ $ ($f$ est croissante sur $\mathbb{R}$)**

## Exercice 4 /11

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

*1.* $(*)$ Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x)$ : $(x \geqslant 0)$ et $Q(x)$ : $(x \geqslant 1)$.

- **1 pt : La proposition $Q(x)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(x)$.
  En choisissant $x_0 = 0$, ...**
- **1 pt : La proposition $Q(x)$ est une condition suffisante à $P(x)$**

*2.* Paramètre : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $P(a, b)$ : $\big((a+b)^2 = a^2 + b^2\big)$ et $Q(a, b)$ : $(a = b = 0)$.

- **1 pt : La proposition $Q(a, b)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(a, b)$.
  En choisissant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, ...**
- **1 pt : La proposition $Q(a, b)$ est une condition suffisante à $P(a, b)$.**

*3.* Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c)$ : $\big(|a + b + c| = 0\big)$ et $Q(a, b, c)$ : $\big(|a + b| + |c| = 0\big)$.

- **1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ n'est pas une condition nécessaire à $P(a, b, c)$.
  En choisissant $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = -1$, ...**
- **1 pt : La proposition $Q(a, b, c)$ est une condition suffisante à $P(a, b, c)$.**

*4.* Paramètre : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Propositions : $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ : $\big(\forall N \in \mathbb{N}^*,\ (u_1 - u_0)\,(u_2 - u_1)\cdots(u_N - u_{N-1}) > 0\big)$ et
$Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ : $\big($la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante$\big)$.

- **4 pts : La proposition $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est une condition nécessaire à $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$**
  - **1 pt : structure de récurrence forte**
  - **1 pt : initialisation**
  - **2 pts : hérédité**
- **1 pt : La proposition $Q\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est une condition suffisante à $P\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.**

## Exercice 5 /28

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

*1.* $(*)$ $x + 1 = \sqrt{\dfrac{x}{6} + 6}$

*2.* $\pi^{3x} - 3 \times \pi^x + 2 = 0$

*3.* $(*)$ $\sqrt{x-1} \leqslant |x| + 1$

*4.* $|3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3|$

*1.* 
- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(1)} = [-36, +\infty[$
- **1 pt : obtention de la disjonction de cas :** $x \in [-36, -1[$**,** $x \geqslant -1$
- **1 pt : cas** $x \in [-36, -1[$
- **3 pts : cas** $x \geqslant -1$
  - **1 pt :** ***(1)*** $\Leftrightarrow 6x^2 + 11x - 30 = 0$
  - **1 pt : Le polynôme** $6X^2 + 11X - 30$ **admet pour racines** $-\dfrac{1}{3}$ **et** $\dfrac{3}{2}$
  - **1 pt :** $-\dfrac{10}{2} < -1$
- **1 pt : L'ensemble des solutions de l'équation *(1)* est donc :** $\{\frac{3}{2}\}$**.**

*2.* 
- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(2)} = \mathbb{R}$
- **1 pt : changement de variable** $\boxed{\ y = \pi^x\ }$
- **1 pt :** $X^3 - 3X + 2 = (X-1)(X^2 + X - 2)$
- **1 pt :** $X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$
- **1 pt :** $\pi^x \neq -2$
- **1 pt : L'ensemble des solutions de l'équation *(2)* est donc :** $\{0\}$**.**

*3.* 
- **1 pt :** $\mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[$
- **1 pt :** $\sqrt{x-1} \ \leqslant\ |x| + 1 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{x-1} \ \leqslant\ x + 1$ **(car** $x \geqslant 1 \geqslant 0$**)**
- **1 pt : stricte croissance de la fonction carré sur** $\mathbb{R}_+$ **(car** $x + 1 \geqslant 0$**))**
- **1 pt :** $X^2 + X + 2$ **n'admet pas de racine et son coefficient dominant est positif. Donc :** $x^2 + x + 2 \geqslant 0$
- **1 pt : L'ensemble des solutions de l'inéquation *(3)* est donc :** $\mathcal{D}_{(3)} = [1, +\infty[$**.**

*4.* • **1 pt :** $\mathcal{D}_{(4)} = \mathbb{R}$

• **1 pt : signe de** $3x^2 + 2x - 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de** $3x^2 + 2x - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

• **1 pt : signe de** $-x^2 + 2x + 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Signe de** $-x^2 + 2x + 3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

• **1 pt : obtention de la disjonction de cas :** $x \in \,]-\infty, -1] \cup ]3, +\infty$**,** $x \in \,]-1, \frac{1}{3}]$, $x \in \,]\frac{1}{3}, 3]$

• **1 pt : L'inéquation *(4)* n'admet donc pas de solution sur** $]-\infty, -1] \cup ]3, +\infty[$.

• **2 pts : L'inéquation *(4)* admet donc pour solution tous les réels de l'intervalle** $]-1, \frac{1}{3}]$ **(dont 1 pt pour** $x \neq -1$**)**

• **2 pts : L'inéquation *(4)* admet donc pour solution tous les réels de l'ensemble** $]-1, 1[ \cap ]\frac{1}{3}, 3] \;= \,]\frac{1}{3}, 1[$.

• **1 pt : l'ensemble des solutions de l'inéquation *(4)* est :** $]-1, \frac{1}{3}] \cup ]\frac{1}{3}, 1[ \,=\, ]-1, 1[$.

## Exercice 6 /22

*1.* **Sommes de Mengoli**

***a)*** $(*)$ Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

• **1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k\,(k+1)} \;=\; \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

• **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ **(télescopage)**

***b)*** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
En s'inspirant de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)}$.

• **1 pt :** $\dfrac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)} \;=\; \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p-1)} - \dfrac{1}{(k+1)\,(k+2)\cdots(k+p)}\right)$

• **1 pt :** $\dfrac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)} \;=\; \dfrac{1}{p}\left(\displaystyle\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+1+i}\right)$

• **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)} \;=\; \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right) - \sum_{j=2}^{n+1}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{j+i}\right)\right)$ **(avec le décalage d'indice** $j = k+1$**)**

• **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k+i}\right) - \sum_{j=2}^{n+1}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{j+i}\right)\right) \;=\; \frac{1}{p}\left(\prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i+1} - \prod_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n+1+i}\right)$ **(par télescopage)**

• **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\cdots(n+p+1)}\right)$

**2. Minimum et maximum**

***a)*** ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$$

- **8 pts :** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \right)$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \;=\; \sum_{\substack{j=1 \\ j \leqslant i}}^{n} \min(i,j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{n} \min(i,j) \;=\; \sum_{\substack{j=1 \\ j \leqslant i}}^{n} j + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{n} i$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \leqslant i}}^{n} j + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{n} i \;=\; \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i \;=\; \frac{i\,(i+1)}{2} + i\,(n-i)$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\frac{i\,(i+1)}{2} + i\,(n-i) \;=\; -\frac{1}{2}\, i^2 + \frac{2n+1}{2}\, i$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \right) \;=\; -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} i$
  - × **1 pt :** $\displaystyle -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} i \;=\; -\frac{1}{2} \times \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2} \times \frac{n\,(n+1)}{2}$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$
- **4 pts :** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}$
  - × **2 pts :** $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \frac{1}{2}\, i^2 - \frac{1}{2}\, i + \frac{n\,(n+1)}{2}$
  - × **2 pts : reste**

***b)*** En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$.

- **1 pt :** $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i+j \;=\; \min(i,j) + \max(i,j)$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \right) + \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j) = n^2\,(n+1)$

## Exercice 7 /10

*1.* $(*)$ Démontrer : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

- **1 pt : structure de raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ (car $\sqrt{3} \geqslant 0$) tel que :**
  - × **d'une part : $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$,**
  - × **d'autre part : $a$ et $b$ n'ont pas d'autres diviseurs communs que $1$ (on dit que $a$ et $b$ sont premiers entre eux).**
- **1 pt : $a^2$ est divisible par $3$**
- **3 pts : $a$ est divisible par $3$**
  - × **1 pt : structure de raisonnement par l'absurde**
  - × **1 pt : Soit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 3k+1$**
  - × **1 pt : Soit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 3k+2$**
- **1 pt : $b^2$ divisible par $3$ donc $b$ divisible par $3$**

*2.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet :

$$(2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad n = 0$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $n$ pour que $(2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q}$.
*On pourra étudier le produit* $(2+\sqrt{3})^n\,(2-\sqrt{3})^n$.

- **1 pt :** $(2+\sqrt{3})^n\,(2-\sqrt{3})^n \ = \ 1$
- **1 pt :** $(2+\sqrt{3})^n$
- **1 pt :** $(2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q} \ \Leftrightarrow \ \dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^n} \in \mathbb{Q} \ \Leftrightarrow \ (2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q} \ \Leftrightarrow \ n = 0$