DS1

⚠ On traitera `OBLIGATOIREMENT` les questions portant un astérisque. Elles sont au nombre de 11. Dans le cas contraire, la note finale se verra divisée par 2.

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) $(*)$ Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) $(*)$ Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. a) Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

5. $(*)$ Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{rcl} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

8. $(*)$ Écrire une fonction **Python**, prenant en paramètre un réel A, et renvoyant un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

Exercice 2

Écrire de manière mathématique les propositions suivantes ainsi que leur négation. On évaluera ensuite la véracité de ces propositions.

1. Tout nombre réel x est inférieur ou égal à son cosinus.

2. $(*)$ Tout réel de carré strictement supérieur à 4 est lui-même strictement supérieur à 2.

3. Le trinôme $z^2 - 3z + 3$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

4. Toute suite d'entiers est majorée.

Exercice 3

Dans les paires suivantes, les propositions (à paramètre) sont-elles équivalentes pour toute valeur des paramètres ? Si ce n'est pas le cas, donner les implications valables.

1. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x^2 > 5)$ et $\big(|x| > \sqrt{5}\big)$.

2. Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $(x < 1)$ et $(x^2 < x)$.

3. Paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^n$.
Propositions : $(x_1 + \cdots + x_n \leqslant n^2)$ et $\big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant n\big)$.

4. Paramètre : une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Propositions : (f est croissante sur $\mathbb{R}$) et $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) \geqslant f(x)\big)$.

Exercice 4

Pour chacune des propositions $P(\cdot)$ ci-dessous, déterminer si la proposition $Q(\cdot)$ est nécessaire, suffisante, les deux à la fois ou rien du tout (réponse à justifier).

1. $(*)$ Paramètre : $x \in \mathbb{R}$.
Propositions : $P(x) : (x \geqslant 0)$ et $Q(x) : (x \geqslant 1)$.

2. Paramètre : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Propositions : $P(a, b) : \big((a+b)^2 = a^2 + b^2\big)$ et $Q(a, b) : (a = b = 0)$.

3. Paramètre : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Propositions : $P(a, b, c) : \big(|a + b + c| = 0\big)$ et $Q(a, b, c) : \big(|a + b| + |c| = 0\big)$.

4. Paramètre : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Propositions : $P\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) : \big(\forall N \in \mathbb{N}^*,\ (u_1 - u_0)(u_2 - u_1) \cdots (u_N - u_{N-1}) > 0\big)$ et $Q\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}\big)$: (la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante).

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $(*)$ $x + 1 = \sqrt{\dfrac{x}{6} + 6}$
2. $\pi^{3x} - 3 \times \pi^{x} + 2 = 0$
3. $(*)$ $\sqrt{x-1} \leqslant |x| + 1$
4. $|3x^2 + 2x - 1| < |-x^2 + 2x + 3|$

Exercice 6

1. **Sommes de Mengoli**

   a) $(*)$ Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}$.

   b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   En s'inspirant de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+p)}$.

2. **Minimum et maximum**

   a) $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

   $$\sum_{i \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$$

   b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$.

Exercice 7

1. $(*)$ Démontrer : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet :

   $$(2+\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad n = 0$$

   En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $(2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{Q}$.
   On pourra étudier le produit $(2+\sqrt{3})^n\,(2-\sqrt{3})^n$.