
DM1

I. Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - 3I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

2. On note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F .

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = 3I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N .

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T .

II. Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

1. Variation de f

- a) Calculer la dérivée f' de f .
- b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x) e^x + 1$$

- c) Démontrer : $f(\alpha) = \alpha - 1$.
- d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

2. Approximation de α

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + e^{-x}$$

- a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.
- b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire :

$$\alpha - 1 < e^{-1}$$

- c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geq 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leq e^{-1} |x - \alpha|$$

- d) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1, +\infty[$ définie par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$

- e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Python** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leq 10^{-6}$$