

DM2

Exercice 1 : Logique

1. Résoudre l'inéquation $-x + 1 \leq \sqrt{3x^2 - 2x - 7}$.

Exercice 2 : Récurrence, somme, produit

Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On note (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n k q^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note de plus f_n la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^n x^k \end{aligned}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une relation entre u_n , f'_n et q .

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une autre expression de $f_n(x)$.

d) En déduire une nouvelle expression de u_n sans le symbole $\sum$.

e) On suppose dans cette question : $|q| < 1$. Déterminer, si elle existe, la limite de (u_n) .

3. a) On note (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{q^k}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec un raisonnement proche des trois questions précédentes, déterminer une expression de v_n sans le symbole $\sum$.

b) On suppose dans cette question : $|q| < 1$. Déterminer, si elle existe, la limite de (v_n) .

Exercice 3 : Généralités sur les fonctions et fonctions usuelles

On note f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \end{aligned}$$

4. Effectuer l'étude complète de la fonction f .

5. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 4 : Ensembles et applications

Soient E et F des ensembles non vides et stables par combinaison linéaire. Soit $f : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall (u_1, u_2) \in E^2, f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) = \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2)$$

On dit que l'application f est **linéaire**.

6. Démontrer : $f(0_E) = 0_F$.

7. On note : $\text{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$. Démontrer :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

8. On rappelle : $\text{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E, v = f(u)\}$. Démontrer :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$$

Exercice 5 : Nombres complexes - Partie I

9. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3(x)$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$.

10. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. On note : $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

a) On suppose : $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

b) On note : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Démontrer : $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 6 : Calculs d'intégrales et EDL

11. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{2 \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) + 1} dx$ à l'aide du changement de variable $t = e^x$.

12. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{1+3x^2}{1+x^2}$.

13. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : 2y'' - 3y' + y = x e^x$.

Exercice 7 : Suites numériques

On note f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f &: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \ln(1+x) \end{aligned}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

14. a) Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$, et calculer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Étudier les variations de f' , puis celles de f .

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

15. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0, +\infty[$.
16. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e - 1, +\infty[$.
- a) Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > e - 1$.
 - b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
17. On suppose dans cette question : $u_0 \in]0, e - 1[$.
Étudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 8 : Limites et continuité d'une fonction d'une variable réelle

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.

18. Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
19. Montrer qu'il existe un unique u_n strictement positif tel que $f_n(u_n) = 0$.
20. Calculer u_1 .
21. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
22. En déduire le signe de u_n et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.
23. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
24. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, f_n(x) = \frac{2x - x^{n+1} - 1}{1 - x}$.
25. En déduire que : $2u_n - 1 = u_n^{n+1}$.
26. Démontrer que (u_n^{n+1}) converge vers 0 et en déduire la limite de (u_n) .