

DM1

Exercice 1

Résoudre le système suivant.

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + 3t = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ -2y + 19z - t = 0 \\ 5x + 11y - 10z + 16t = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y + 3t = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ -2y + 19z - t = 0 \\ 5x + 11y - 10z + 16t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y + 3t = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ -2y + 19z - t = 0 \\ y - 10z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y + 3t = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ z - t = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y + 3t = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ z - t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

En reprenant les équivalences :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y & = -3t \\ -y + 9z & = 0 \\ z & = t \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 9L_3 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y & = -3t \\ -y & = -9t \\ z & = t \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x & = -21t \\ -y & = -9t \\ z & = t \end{cases}$$

On obtient, en notant S l'ensemble des solutions de (S) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -21t \text{ et } y = 9t \text{ et } z = t \} \\ &= \{ (-21t, 9t, t, t) \mid t \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ t \cdot (-21, 9, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R} \} \\ &= \text{Vect}((-21, 9, 1, 1)) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S) est : $\text{Vect}((-21, 9, 1, 1))$.

□

Exercice 2

Soient E et F des ensembles. Soit f une application de E dans F . Démontrer :

$$f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$$

Démonstration.

On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que f est surjective.

Démontrons : $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$.

Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que : $y = f(x)$.

Comme $x \in f^{-1}(B)$, alors : $f(x) \in B$.

Ainsi : $y = f(x) \in B$.

($\supset$) Soit $y \in B$.

Comme l'application f est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

Comme $y \in B$, alors : $f(x) = y \in B$. Autrement dit : $x \in f^{-1}(B)$.

On a donc démontré qu'il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que : $y = f(x)$.

Ainsi : $y \in f(f^{-1}(B))$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Démontrons que f est surjective.

Soit $y \in F$.

On remarque : $\{y\} \in \mathcal{P}(F)$. Ainsi : $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Comme $y \in \{y\}$, on en déduit : $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$.

Il existe donc $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que : $y = f(x)$.

Par définition de l'image réciproque d'un ensemble : $f^{-1}(\{y\}) \subset E$. On a donc démontré qu'il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.

Ainsi, l'application f est surjective.

Finalelement : $f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$
--

□

Exercice 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle **module** de z , et on note $|z|$ le réel défini par :

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}}$$

1. Démontrer que l'application $f = |\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

$$z \mapsto |z|$$

Démonstration.

Pour démontrer que la fonction f est bien définie, il faut démontrer :

a) pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $f(z)$ est bien défini.

b) l'application f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z \bar{z} = (\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)) (\operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)) = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \in \mathbb{R}_+$$

On en déduit que le nombre $\sqrt{z \bar{z}}$ est bien défini. Autrement dit, le nombre $f(z)$ est bien défini.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$.

Comme $z \bar{z} \in \mathbb{R}_+$ et que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors : $f(z) \in \mathbb{R}_+$.

L'application f est donc bien définie.

□

2. Identités de polarisation

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

a) Démontrer :

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2} (|z_1 + z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2)$$

Démonstration.

• D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|z_1 + z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2) &= \frac{1}{2} ((z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} - z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2) \\ &= \frac{1}{2} ((z_1 + z_2) (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2) \quad (\text{par linéarité de la conjugaison}) \\ &= \frac{1}{2} (\cancel{z_1 \bar{z}_1} + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \cancel{z_2 \bar{z}_2} - \cancel{z_1 \bar{z}_1} - \cancel{z_2 \bar{z}_2}) \\ &= \frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2} \end{aligned}$$

• D'autre part :

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}}{2} = \frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2} = \frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2}$$

Finalement : $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2} (|z_1 + z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2)$.

□

b) Démontrer :

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{4}(|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)$$

Démonstration.

On remarque :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) &= \frac{1}{4}((z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}) \\ &= \frac{1}{4}((z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)) \quad (\text{par linéarité de la conjugaison}) \\ &= \frac{1}{4}(\cancel{z_1 \bar{z}_1} + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + \cancel{z_2 \bar{z}_2} - (\cancel{z_1 \bar{z}_1} - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + \cancel{z_2 \bar{z}_2})) \\ &= \frac{2(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)}{4} \\ &= \frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2} \\ &= \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \quad (\text{d'après la question précédente}) \end{aligned}$$

Finalement : $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{4}(|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)$.

□

3. On note g la fonction définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z+1}{\bar{z}-1} \end{aligned}$$

Résoudre l'équation $g(z) = -3$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} g(z) = -3 &\Leftrightarrow \frac{z+1}{\bar{z}-1} = -3 \\ &\Leftrightarrow z+1 = -3(\bar{z}-1) \\ &\Leftrightarrow z+3\bar{z} = 2 \\ &\Leftrightarrow (x+iy) + 3(x-iy) = 2 \\ &\Leftrightarrow 4x - 2iy = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x &= 2 \\ -2y &= 0 \end{cases} \quad (\text{par unicité de l'écriture algébrique}) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc : $\{\frac{1}{2}\}$.

□