
DM1

Exercice 1

Résoudre le système suivant.

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + 3t = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ -2y + 19z - t = 0 \\ 5x + 11y - 10z + 16t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soient E et F des ensembles. Soit f une application de E dans F . Démontrer :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$$

Exercice 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle **module** de z , et on note $|z|$ le réel défini par :

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}}$$

1. Démontrer que l'application $f = |\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie.

$$z \mapsto |z|$$

2. Identités de polarisation

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

a) Démontrer :

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2)$$

b) Démontrer :

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{4}(|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)$$

3. On note g la fonction définie par :

$$g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z+1}{\bar{z}-1}$$

Résoudre l'équation $g(z) = -3$.