
DM3

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\mapsto (X^2 + 1) P' - 2(X + 1) P\end{aligned}$$

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, déterminer $\varphi(P_k)$.
3. On note : $E_{-2}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi + 2\text{id})$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}_2[X]$.
Déterminer une base de $E_{-2}(\varphi)$.
4. **a)** Déterminer le rang de l'application φ .
b) L'application φ est-elle un automorphisme ?