DM2

Exercice 1

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$

  Alors, comme $x > 0$:

$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant 1$$

  On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in\ ]0,+\infty[$:

$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

    De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

$\square$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0, 1[$ (car dérivable sur $]0, 1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0, 1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0, 1[$ dans $f(]0, 1[)$.

$$f(]0,1[) \;=\; \left] \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x) \right[=]1, +\infty[$$

  Or $2 \in]1, +\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0, 1[$, notée a.
- La fonction f est :
  - × continue sur $]1, +\infty[$ (car dérivable sur $]1, +\infty[$),
  - × strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $f(]1, +\infty[)$.

$$f(]1,+\infty[) \;=\; \left] \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to +\infty} f(x) \right[=]1, +\infty[$$

  Or $2 \in]1, +\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$, notée b.

$$\boxed{\text{Finalement, l'équation } f(x) = 2 \text{ admet exactement 2 solutions sur }]0, +\infty[\text{ notées } a \text{ et } b \text{ telles que } 0 < a < 1 < b.}$$

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$,
  - × $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
    De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et ainsi : $f(4) = 2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6 \geqslant 2$.
  - × $f(b) = 2$.

  On a donc : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.

- Notons g la réciproque de f sur $]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $g :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. En appliquant g de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} g\big(f(2)\big) & \leqslant & g\big(f(b)\big) & \leqslant & g\big(f(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 2 & \leqslant & b & \leqslant & 4 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } b \in [2,4].}$$

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation. Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème. □

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2.$

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b,+\infty[\end{array} \right.$

- **Initialisation** :
  $u_0 = 4$. Or, d'après la question *3.*, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b,+\infty[$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b,+\infty[\end{array} \right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b,+\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Comme $u_n \geqslant b$

    alors $\ln(u_n) \geqslant \ln(b)$ *(par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $]0,+\infty[$*)*

    et $\ln(u_n) + 2 \geqslant \ln(b) + 2$

    $$\begin{array}{c} \ln(u_n)+2 \\ \shortparallel \\ u_{n+1} \end{array}$$

    Enfin, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Ainsi : $\ln(b) = b - 2$.
    On obtient alors :

    $$u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b,+\infty[.}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathscr{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ \ln(u_n) + 2 - u_n \ = \ 2 - (u_n - \ln(u_n)) \ = \ f(b) - f(u_n)$$

  Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
  De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
  D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad$ où $\quad \mathscr{P}(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$.

▶ **Initialisation** :
$u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
Donc $u_1 \leqslant u_0$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).

$$\begin{array}{llcll}
\text{Tout d'abord} & u_{n+1} & \leqslant & u_n & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\[2ex]
\text{donc} & \ln(u_{n+1}) & \leqslant & \ln(u_n) & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex]
\text{et} & \ln(u_{n+1}) + 2 & \leqslant & \ln(u_n) + 2 & \\
 & \shortparallel & & \shortparallel & \\
 & u_{n+2} & & u_{n+1} &
\end{array}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  × décroissante,
  × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge. On note } \ell \text{ sa limite.}}$$

- Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant b$.
  Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
- Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
  Donc, par continuité de ln sur $]0, +\infty[$: $\ell = \ln(\ell) + 2$. Or :

$$\ell = \ln(\ell) + 2 \ \Leftrightarrow\ \ell - \ln(\ell) = 2 \ \Leftrightarrow\ f(\ell) = 2$$

Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc } \ell = b.}$$

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

Démonstration.
On note h la fonction définie par $h : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction h est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  Soit $x \in [b, +\infty[$. Alors $h'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. Ainsi : $\forall x \in [b, +\infty[,\ |h'(x)| = h(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :

$$\forall x \in [b, +\infty[,\ h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  × h est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  × $\forall x \in [b, +\infty[,\ |h'(x)| = h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2,\ \mid h(y) - h(x) \mid \leqslant \frac{1}{2}\ |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

$$h(u_n) - h(b) \ = \ \mid h(u_n) - h(b) \mid \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - b| \ = \ \frac{1}{2}\ (u_n - b)$$

Or :
× $h(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
× $h(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

$$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)\ :\ u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  - ▶ **Initialisation** :
    D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
    D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
    Ainsi : $$\begin{array}{rcll} u_0 - b & = & 4 - b & \\ & \leqslant & 4 - 2 & \textit{(car } b \geqslant 2 \textit{ d'après la question 3)} \\ & = & 2 \ = \ \dfrac{1}{2^{0-1}} & \end{array}$$
    D'où $\mathscr{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n}$).
    D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
    Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
    En combinant ces deux résultats, on obtient :
    $$u_{n+1} - b \ \leqslant\ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
    D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

7. a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n. On admettra que la bibliothèque `numpy` est déjà chargée.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
def suite(n) :
    u = 4
    for i in range(n) :
        u = np.log(u) + 2
    return u
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `suite`,
  × elle prend en paramètre d'entrée l'entier `n`,
  × elle renvoie la valeur stockée dans la variable `u`.

```
def suite(n) :
```

```
    return u
```

La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 4 : la valeur de u_0.

```
2        u = 4
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle `for`) :

```
3        for i in range(n) :
4            u = np.log(u) + 2
```

  On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable `u`, est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans `u`.
- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la quantité $u_{\mathtt{n}}$ où `n` est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction.

Commentaire

- Le programme **Python** consiste à mettre à jour successivement la variable `u` jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.
  Si avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle (avec $\mathtt{i} \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$) :

  $$\text{la variable } \mathtt{u} \text{ contient la valeur } u_{i-1}$$

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  $$\text{la variable } \mathtt{u} \text{ contient la valeur } u_i$$

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `u` contient $u_{\mathtt{n}}$.

$\square$

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1  def valeur_approchee(epsilon) :
2      n = 0
3      while ............ :
4          n = n + 1
5      return suite(n)
```

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :

$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$

Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.

- On complète alors le programme **Python** de la façon suivante :

```
3        while 1 / 2**(n-1) > epsilon
```

On propose le programme suivant :

```
1  def valeur_approchee(epsilon) :
2      n = 0
3      while 1 / 2**(n-1) > epsilon :
4          n = n + 1
5      return suite(n)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  Commençons par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `valeur_approchee`,
  × elle prend comme paramètre d'entrée le réel `epsilon`,
  × elle renvoie le résultat de la commande `suite(n)`.

```
1  def valeur_approchee(epsilon)
```

```
5        return suite(n)
```

  On initialise ensuite la variable `n` à 0.

```
2  n = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à déterminer un entier n tel que : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Pour ce faire, on se sert de la condition suffisante exposée ci-dessus à savoir : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$ (si cette condition est vérifiée alors il en est de même de la précédente).
  Le programme consiste donc à incrémenter la variable `n` de 1 jusqu'à ce que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable `n` de 1 tant que : $\frac{1}{2^{n-1}} > \varepsilon$.
  Pour cela on met en place une boucle while :

```
3        while 1 / 2**(n-1) > epsilon :
```

  Puis on met à jour la variable `n`.

```
4            n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient un entier n tel que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, ce qui assure : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Il n'y a plus qu'à calculer $u_{\mathtt{n}}$ à l'aide de la fonction `suite` définie précédemment.

```
6        return suite(n)
```

□

Exercice 2

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A+I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A + I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A+I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A+I)^2 = A^2 + 2\,A + I \qquad \textit{(car les matrices A et I commutent)}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & A^2 + 2\,A + I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & A^2 + 2\,A = -I \\ \text{et} & A\,(A + 2\,I) = -I \\ \text{ainsi} & A\,(-(A+2\,I)) = I \end{array}$$

  On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-(A+2\,I)$.

$$\boxed{A^{-1} = -A - 2\,I}$$

□

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
AX = -X &\iff (A+I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3\,L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \ z = -2\,x + y \right.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -2\,x + y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2\,x + y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

- Lors de la résolution du système, on choisit d'exprimer la variable z en fonction des variables x et y. Ces deux dernières variables sont alors appelées variables auxiliaires.
- Il était possible de faire d'autres choix. Par exemple :

$$AX = -X \quad \Leftrightarrow \quad y \ = \ 2\,x + z$$

On obtient alors l'expression de F suivante : $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Notons au passage : $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(il suffit de remplacer le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ par la combinaison linéaire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$\square$

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$:

  × engendre F,

  × est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de F.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } G.}$$

□

3. On note $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left.\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1$. On obtient :

$$\left.\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient :

$$\left.\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

- On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\left.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que les deux premières colonnes de la matrice P ne sont autres que les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. C'est ce choix qui permet d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.}$$

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $P^{-1}A^nP = T^n$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
- D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathscr{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \textit{(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP = P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n.}$$

□

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N \;=\; T + I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- Au lieu de procéder par récurrence, il est aussi possible d'écrire, pour tout $k \geqslant 2$:

$$N^k \;=\; N^{k-2} \times N^2 \;=\; N^{k-2} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \;=\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

- Insistons sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

Démonstration.

- Les matrices $(-I)$ et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (-I + N)^n & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^{n-k}\, N^k & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, I^{n-k}\, N^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, I\, N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k} & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, N^k & \textit{(car on a montré :} \\
& & & \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\binom{n}{0} (-1)^n\, N^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1}\, N^1 & \\
& = & (-1)^n\, I + n\, (-1)^{n-1}\, N & \\
& = & (-1)^n\, (I + (-1)^{-1}\, n\, N) \;=\; (-1)^n\, (I - n\, N) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = (-1)^n\, (I - n\, N).}$$

Commentaire

- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

☐

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

Démonstration.
Comme $N = T + I$, on obtient :

$$(-1)^n\,(I - n\,N) \;=\; (-1)^n\,\big(I - n\,(T+I)\big) \;=\; (-1)^n\,\big((1-n)\,I - n\,T\big) \;=\; (-1)^n\,\big(-(n-1)\,I - n\,T\big)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ T^n = (-1)^{n+1}\,\big((n-1)\,I + n\,T\big).}$$

☐

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\,\big((n-1)\,I + n\,A\big)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = (-1)^{n+1}\,\big((n-1)\,I + n\,T\big)$.
Or : $A^n = P\ T^n\ P^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{aligned} A^n &= P\ T^n\ P^{-1} \;=\; P\ \Big((-1)^{n+1}\,\big((n-1)\,I + n\,T\big)\Big)\ P^{-1} \\ &= (-1)^{n+1}\,\big((n-1)\,PP^{-1} + n\,PTP^{-1}\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^{n+1}\,\big((n-1)\,I + n\,A\big).}$$

☐

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1}\,\big((n-1)\,I + n\,A\big) &= (-1)^{-1+1}\,\big((-1-1)\,I + (-1)\,A\big) \\ &= (-2\,I - A) \;=\; -A - 2\,I \end{aligned}$$

Ainsi, la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

☐