Puissances $m^{\text{ème}}$ de matrices

I. Objectif

Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche dans cette fiche à calculer A^m.
Si A est une matrice quelconque, il est a priori difficile de trouver une expression générale de A^m. On s'intéresse à 2 cas particuliers où cette expression peut être obtenue simplement.

II. Matrices diagonalisables

Définition (Matrices diagonalisables)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que la matrice A est *diagonalisable* s'il existe :

× une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$,

× une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,

telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.

MÉTHODO

Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour déterminer A^m dans le cas où A est diagonalisable, on procède de la façon suivante :

1) on démontre par récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}$, $A^m = P\,D^m\,P^{-1}$.

2) pour tout $m \in \mathbb{N}$, on calcule D^m.

3) si ce n'est pas déjà fait, on calcule P^{-1} grâce à l'algorithme du pivot de Gauss.

4) on effectue enfin, pour tout $m \in \mathbb{N}$, le produit matriciel $P\,D^m\,P^{-1}$.

Exercice 1. *n°92 p.201 (Manuel Mathématiques expertes - Le Livre Scolaire)*

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer l'inverse de P.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations suivantes $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - 6\,L_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite de Gauss obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Elle est donc inversible et il en est de même de P.

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 15\, L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 6\, L_2 + L_3 \end{array}\right.$.

$$\left(\begin{array}{ccc} 15 & 60 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 10 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \end{array}\right)\right.$$

On effectue l'opération $\{\ L_1 \leftarrow L_1 + 10\, L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 0 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \end{array}\right)\right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{15}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{30}\ L_3 \end{array}\right.$.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{30} \end{array}\right)\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, } P \text{ est inversible et : } P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

2) Calculer le produit $D = P^{-1} \times A \times P$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A \times P \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$D \ = \ P^{-1} \times A \times P \ = \ \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix} \ = \ \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } D = P^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.}$$

□

3) En déduire : $A = P \times D \times P^{-1}$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lrcll} & D & = & P^{-1}\,A\,P & \\ \text{donc} & P\,D & = & P\,P^{-1}\,A\,P & \textit{(en multipliant à gauche par } P\textit{)} \\ \text{d'où} & P\,D & = & A\,P & \textit{(car } P\,P^{-1} = I_3\textit{)} \\ \text{ainsi} & P\,D\,P^{-1} & = & A\,P\,P^{-1} & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ \text{enfin} & P\,D\,P^{-1} & = & A & \textit{(toujours car } P\,P^{-1} = I_3\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } A = P\,D\,P^{-1}.}$$

□

4) Pour tout entier naturel n, déterminer l'expression de D^n.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme la matrice } D \text{ est diagonale : } \forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.}$$

□

5) Exprimer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Démonstration.

- On commence par démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
  - ▸ **Initialisation** :
    - × D'une part : $A^0 = I_3$.
    - × D'autre part : $P\,D^0\,P^{-1} = P\,I_3\,P^{-1} = P\,P^{-1} = I_3$.

    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $A^{n+1} = P\,D^{n+1}\,P^{-1}$).

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A \times (P\,D^n\,P^{-1}) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (P\,D\,P^{-1}) \times (P\,D^n\,P^{-1}) & \textit{(d'après } \textbf{3.}\textit{)} \\ & = & P\,D \times (P\,P^{-1}) \times D^n\,P^{-1} & \\ & = & P\,D \times I_3 \times D^n\,P^{-1} & \\ & = & P \times (D \times D^n) \times P^{-1} & \\ & = & P\,D^{n+1}\,P^{-1} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n\,P^{-1}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On obtient alors :

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \times 2^n & 2 \times (-4)^n \\ 1 & 3 \times 2^n & -3 \times (-4)^n \\ 1 & -2 \times 2^n & 2 \times (-4)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+2} & 2 \times (-4)^n \\ 1 & 3 \times 2^n & -3 \times (-4)^n \\ 1 & -2^{n+1} & 2 \times (-4)^n \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} A^n &= P \times D^n \times P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+2} & 2 \times (-4)^n \\ 1 & 3 \times 2^n & -3 \times (-4)^n \\ 1 & -2^{n+1} & 2 \times (-4)^n \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+2} & 2 \times (-4)^n \\ 1 & 3 \times 2^n & -3 \times (-4)^n \\ 1 & -2^{n+1} & 2 \times (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 5 \times 2^{n+2} + 10 \times (-4)^n & 12 - 12 \times (-4)^n & 18 - 5 \times 2^{n+2} + 2 \times (-4)^n \\ 15 \times 2^n - 15 \times (-4)^n & 12 + 18 \times (-4)^n & 18 - 15 \times 2^n - 3 \times (-4)^n \\ -5 \times 2^{n+1} + 10 \times (-4)^n & 12 - 12 \times (-4)^n & 18 + 5 \times 2^{n+1} + 2 \times (-4)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 5 \times 2^{n+2} + 10 \times (-4)^n & 12\left(1 - (-4)^n\right) & 18 - 5 \times 2^{n+2} + 2 \times (-4)^n \\ 15\left(2^n - (-4)^n\right) & 6\left(2 + 3 \times (-4)^n\right) & 3\left(6 - 5 \times 2^n - \times(-4)^n\right) \\ -5\left(2^{n+1} - 2 \times (-4)^n\right) & 12\left(1 - (-4)^n\right) & 18 + 5 \times 2^{n+1} + 2 \times (-4)^n \end{pmatrix}.}$$

III. Utilisation de la formule du binôme de Newton

Définition (Matrice nilpotente)
Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que la matrice N est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

× $N^{k-1} \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$,

× $N^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

MÉTHODO

Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour déterminer A^m lorsque $A = D + N$ avec :

× $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,

× $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente,

× les matrices D et N commutent (*i.e.* $N\,D = D\,N$),

on suit la méthode suivante :

1) si ce n'est pas déjà fait, on vérifie que N est nilpotente. Pour cela, on calculer les puissances successives de la matrice N jusqu'à obtenir la matrice nulle $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

2) on vérifie que les matrices D et N commutent.

3) on applique la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

On note I la matrice identité d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.

Démonstration.

$$A = I + 2H \Leftrightarrow 2H = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice recherchée est } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

2. Calculer H^2, puis H^k pour tout $k \geqslant 2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que : $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{H^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$: $H^k = 0$.
(on peut remarquer que, pour tout $k \geqslant 2$: $H^k = H^2 \times H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2,\ H^k = 0.}$$

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H.

Démonstration.

- Les matrices I et $2H$ commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(I+2H)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2H)^k\ I^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\ H^k && \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^k\ H^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^k\ H^k} && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^k\ H^k && \textit{(car pour tout } k \geqslant 2 : H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 2^0\ H^0 + \binom{n}{1} 2^1\ H^1 \\
&= I + 2\ n\ H
\end{aligned}$$

- Enfin : $(I+2H)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I+2H)^n = I + 2n\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$. □