Écriture en base b

I. Rappel

Définition
Soit $b \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in [\![0, n-1]\!]^{n+1}$ tels que :

$$p \;=\; a_n\, b^n + a_{n-1}\, b^{n-1} + \cdots + a_2\, b^2 + a_1\, b^1 + a_0\, b^0 \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i\, b^i$$

Alors l'écriture $a_n\, a_{n-1}\, \cdots a_2\, a_1\, a_0$ est appelée *écriture en base b de l'entier p*. On note :

$$p \;=\; \overline{a_n\, a_{n-1}\, \cdots\, a_2\, a_1\, a_0}^{\,b}$$

(on précise ainsi la base dans laquelle on travaille)

Commentaire

- La base que nous utilisons le plus est la base 10, que l'on manipule depuis l'enfance. En effet, par exemple :
$$953 \;=\; 9 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$
Nous écrivons donc naturellement les nombres en base 10.
- Les deux autres bases les plus utilisées sont la base 2 et la base 16. Elles sont très présentes en informatique.

Exemple

- On souhaite écrire le nombre 19 en base 2.
On commence par remarquer :
$$19 \;=\; {\color{red}1} \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + {\color{blue}1} \times 2^1 + {\color{green}1} \times 2^0$$
On en déduit : $19 = \overline{{\color{red}1}00{\color{blue}1}{\color{green}1}}^{\,2}$.
- On souhaite écrire le nombre 257 en base 5.
On commence par remarquer :
$$429 \;=\; 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
On en déduit : $429 = \overline{3204}^{\,5}$.

II. Comment obtenir algorithmiquement une écriture en base b d'un entier p ?

1) On commence par effectuer la division euclidienne de p par b.
Il existe alors $(q_1, r_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$p \;=\; b\,q_1 + r_1 \qquad (\text{et } 0 \leqslant r_1 < b)$$

Deux cas se présentent alors :

a) si $q_1 = 0$, alors on a :

$$p \;=\; b \times 0 + r_1 \;=\; r_1 \times b^0 \qquad \text{avec } r_1 \in [\![0, b-1]\!]$$

On en déduit : $p = \overline{r_1}^{\,b}$.

b) si $q_1 > 0$, alors on effectue la division euclidienne de q_1 par b.
Il existe donc $(q_2, r_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$q_1 \;=\; b\,q_2 + r_2 \qquad (\text{et } 0 \leqslant r_2 < b)$$

Deux cas se présentent alors :

a) si $q_2 = 0$, alors on a :

$$\left\{\begin{array}{rcll} p & = & b\,q_1 + r_1 & (1) \\ q_1 & = & r_2 & (2) \end{array}\right.$$

En remplaçant q_1 par son expression dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{array}{rcll} p & = & b\,q_1 + r_1 & \\ & = & b\,r_2 + r_1 & \textit{(d'après (2))} \\ & = & r_2\,b^1 + r_1\,b^0 & \end{array}$$

De plus : $(r_1, r_2) \in [\![0, b-1]\!]^2$. On en déduit : $p = \overline{r_2\,r_1}^{\,b}$.

b) si $q_2 > 0$, alors on effectue la division euclidienne de q_2 par b.
Il existe donc $(q_3, r_3) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$q_2 \;=\; b\,q_3 + r_3 \qquad (\text{et } 0 \leqslant r_3 < b)$$

Deux cas se présentent alors :

- si $q_3 = 0$, alors on a :

$$\left\{\begin{array}{rcll} p & = & b\,q_1 + r_1 & (1) \\ q_1 & = & b\,q_2 + r_2 & (2) \\ q_2 & = & r_3 & (3) \end{array}\right.$$

En remplaçant q_2 par son expression dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{array}{rcll} q_1 & = & b\,q_2 + r_2 & \\ & = & b\,r_3 + r_2 & \textit{(d'après (3))} \end{array}$$

En remplaçant q_1 par son expression dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{array}{rcll} p & = & b\,q_1 + r_1 & \\ & = & b\,(b\,r_3 + r_2) + r_1 & \textit{(d'après l'égalité démontrée ci-dessus)} \\ & = & b^2\,r_3 + b\,r_2 + r_1 & \\ & = & r_2\,b^2 + r_2\,b^1 + r_1\,b^0 & \end{array}$$

De plus : $(r_1, r_2, r_3) \in [\![0, b-1]\!]^3$. On en déduit : $p = \overline{r_3\,r_2\,r_1}^{\,b}$.

- si $q_3 > 0$, on itère encore le processus.

2) On itère ce processus jusqu'à obtenir le premier quotient nul. Notons ce quotient q_{n+1}. On obtient alors la succession d'égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcll} p & = & b\,q_1 + r_1 & (1) \\ q_1 & = & b\,q_2 + r_2 & (2) \\ q_2 & = & b\,q_3 + r_3 & (3) \\ & \vdots & & \\ q_{n-2} & = & b\,q_{n-1} + r_{n-1} & (n-1) \\ q_{n-1} & = & b\,q_n + r_n & (n) \\ q_n & = & \cancel{b\,q_{n+1}} + r_{n+1} \ = \ r_{n+1} & (n+1) \end{array}\right.$$

On procède ensuite comme précédemment :

a) On remplaçant q_n par son expression dans l'équation (n), on obtient :

$$\begin{array}{rcll} q_{n-1} & = & b\,q_n + r_n & \\ & = & b\,r_{n+1} + r_n & \text{(d'après } (n+1)\text{)} \end{array}$$

b) On remplace q_{n-1} par son expression dans l'équation $(n-1)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} q_{n-2} & = & b\,q_{n-1} + r_{n-1} & \\ & = & b\,(b\,r_{n+1} + r_n) + r_{n-1} & \text{(d'après l'égalité démontrée ci-dessus)} \\ & = & b^2\,r_{n+1} + b\,r_n + r_{n-1} & \end{array}$$

c) On itère ce procédé jusqu'à remplacer q_1 par son expression dans (1). On obtient enfin :

$$\begin{array}{rcl} p & = & b\,q_1 + r_1 \\ & = & b\,(b^{n-1}\,r_{n+1} + b^{n-2}\,r_n + \cdots + b\,r_3 + r_2) + r_1 \\ & = & b^n\,r_{n+1} + b^{n-1}\,r_n + \cdots + b^2\,r_3 + b\,r_2 + r_1 \\ & = & r_{n+1}\,b^n + r_n\,b^{n-1} + \cdots r_3\,b^2 + r_2\,b^1 + r_1\,b^0 \end{array}$$

De plus : $(r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}) \in [\![0, b-1]\!]^{n+1}$. On en déduit : $p = \overline{r_{n+1}\,r_n\,\cdots\,r_1}^{b}$.

On sous-entend dans cette présentation que l'algorithme s'arrête toujours. Démontrons le.

Démonstration.
On procède par l'absurde.
Supposons que l'algorithme ne s'arrête pas.
Alors il existe une suite (infinie) $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de quotients **strictement positifs** (en notant $q_0 = p$).

- Démontrons que la suite (q_n) est strictement décroissante.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Par construction : $q_n = b\,q_{n+1} + r_{n+1}$ avec $0 \leqslant r_{n+1} < b$.
  On sait de plus : $b \in [\![2, +\infty$. En particulier :

$$\begin{array}{rrcll} & b & > & 1 & \\ \text{donc} & b\,q_{n+1} & > & q_{n+1} & \quad \textit{(car } q_{n+1} > 0\textit{)} \end{array}$$

  Or $r_{n+1} \geqslant 0$. D'où : $b\,q_{n+1} + r_{n+1} \geqslant b\,q_{n+1}$. Ainsi, par transitivité :

$$\begin{array}{ccccc} b\,q_{n+1} + r_{n+1} & \geqslant & b\,q_{n+1} & > & q_{n+1} \\ \shortparallel & & & & \\ q_n & & & & \end{array}$$

  On a donc : $q_n > q_{n+1}$.
  On en déduit bien que la suite (q_n) est strictement décroissante.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : q_n \leqslant q_0 - n$.
  - **Initialisation** :
    On remarque : $q_0 - 0 = q_0$. Donc : $q_0 \leqslant q_0 - 0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $q_{n+1} \leqslant q_0 - (n+1)$).
    Comme la suite (q_n) est strictement décroissante, on en déduit :

$$q_{n+1} < q_n$$

    Or q_{n+1} et q_n sont des entiers. On obtient donc :

$$q_{n+1} \leqslant q_n - 1$$

    De plus, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rrcl} & q_n & \leqslant & q_0 - n \\ \text{donc} & q_n - 1 & \leqslant & q_0 - n - 1 \\ \text{d'où} & q_n - 1 & \leqslant & q_0 - (n+1) \end{array}$$

    Ainsi, par transitivité :

$$q_{n+1} \leqslant q_n - 1 \leqslant q_0 - (n+1)$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, q_n \leqslant q_0 - n$.

- Or : $\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$. Donc : $\lim_{n\to+\infty} q_0 - n = -\infty$.
  Par théorème de comparaison, on en déduit : $\lim_{n\to+\infty} q_n = -\infty$.
- On sait donc :
  × d'une part : $\lim_{n\to+\infty} q_n = -\infty$,
  × d'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \in \mathbb{N}$. D'où, en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant 0$.
  Absurde !

On en déduit que l'algorithme s'arrête. □

Commentaire

- On démontre en fait dans la preuve précédente un résultat plus général : il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers **naturels**.
  Ce résultat est souvent utile en arithmétique. On s'en servira de nouveau lors de la démonstration de l'algorithme d'Euclide.
- Une application de cet algorithme est proposée en question ***1.*** de l'exercice suivant.

III. Correction de l'exercice 90 p.108

1. Soit $a = 135$ un entier écrit en base 10.
Effectuer la division euclidienne de a par 2, puis les divisions euclidiennes successives des quotients par 2. En déduire l'écriture de a en base 2.

Démonstration.
On a les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$\begin{array}{rcl} 135 & = & 2 \times 67 + \mathbf{1} \\ 67 & = & 2 \times 33 + \mathbf{1} \\ 33 & = & 2 \times 16 + \mathbf{1} \\ 16 & = & 2 \times 8 + \mathbf{0} \\ 8 & = & 2 \times 4 + \mathbf{0} \\ 4 & = & 2 \times 2 + \mathbf{0} \\ 2 & = & 2 \times 1 + \mathbf{0} \\ 1 & = & 2 \times 0 + \mathbf{1} \end{array}$$

(tous les reste ci-dessus appartiennent bien à l'ensemble $[\![0, 2[\![$)

$$\boxed{\text{On en déduit : } a = 135 = \overline{10000111}^2.}$$ □

2. Soit $N = \overline{11010110}^2$ un entier écrit en base 2. Écrire ce nombre en base 10.

Démonstration.
Par définition de l'écriture en base 2 :

$$\begin{array}{rcl} N & = & 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ & = & 128 + 64 + 16 + 4 + 2 \\ & = & 214 \end{array}$$

$$\boxed{N = 214}$$ □

3. On souhaite écrire N en base 16 (base hexadécimale). En base 16, il faut introduire d'autres symboles.
Les symboles correspondant aux « chiffres » en base 16 sont $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

a) Écrire la division euclidienne de N par 16.

Démonstration. En effectuant la division euclidienne de N par 16, on obtient :

$$N = 214 = 16 \times 13 + 6$$

(et on a bien : $0 \leqslant 6 < 16$) □

b) En déduire l'écriture de N dans la base hexadécimale.

Démonstration.
D'après la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} 214 &= 16 \times 13 + 6 \\ &= 13 \times 16^1 + 6 \times 16^0 \end{aligned}$$

Or le nombre 13 correspond au chiffre D en base 16.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N = \overline{D6}^{16}.}$$

□

4. Soit $P = \overline{2A14E}^{16}$ écrit en base hexadécimale. Donner l'écriture de P en base 10.

Démonstration.
Par définition de l'écriture an base 16 :

$$\begin{aligned} P &= 2 \times 16^4 + 10 \times 16^3 + 1 \times 16^2 + 4 \times 16^1 + 14 \times 16^0 \\ &= 172\,366 \end{aligned}$$

$$\boxed{P = 172\,366}$$

□

5. On donne 7, D et 5 trois nombres écrits en base hexadécimale.

a) Donner l'écriture de ces nombres en base 2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \overline{7}^{16} &= 7 \\ &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= \overline{111}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{7}^{16} = \overline{111}^2}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \overline{D}^{16} &= 13 \\ &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= \overline{1101}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{D}^{16} = \overline{1101}^2}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\overline{5}^{16} &= 5\\ &= 1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0\\ &= \overline{101}^{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{5}^{16}=\overline{101}^{2}}$$

□

b) Le nombre $\overline{7D5}^{16}$ est écrit en base 16. Donner son écriture en base 2.

Démonstration.
Par définition de l'écriture en base 16 :

$$\begin{aligned}&\overline{7D5}^{16}\\ =\ & 7\times 16^2+13\times 16^1+5\times 16^0\\ =\ & 7\times \left(2^4\right)^2+13\times \left(2^4\right)^1+5\times \left(2^4\right)^0\\ =\ & 7\times 2^{4\times 2}+13\times 2^{4\times 1}+5\times 2^{4\times 0}\\ =\ & 7\times 2^8+13\times 2^4+5\times 2^0\\ =\ & (2^2+2^1+2^0)\times 2^8+(2^3+2^2+2^0)\times 2^4+(2^2+2^0)\times 2^0 \quad \textit{(d'après la question précédente)}\\ =\ & 2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^2+2^0\\ =\ & 1\times 2^{10}+1\times 2^9+1\times 2^8+1\times 2^7+1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \overline{7D5}^{16}=\overline{11111010101}^{2}}$$

□

6. a) En remarquant que $16=2^4$, justifier la méthode utilisée ci-dessous pour écrire en base 2 un nombre donné en base 16.

Base 16	7	D	5
Base 2	0111	1101	0101

Démonstration.
Soit $p\in\mathbb{N}$.

- Les nombres $\overline{0}^{16}$, $\overline{1}^{16}$, $\overline{2}^{16}$, $\overline{3}^{16}$, $\overline{4}^{16}$, $\overline{5}^{16}$, $\overline{6}^{16}$, $\overline{7}^{16}$, $\overline{8}^{16}$, $\overline{9}^{16}$, $\overline{A}^{16}$, $\overline{B}^{16}$, $\overline{C}^{16}$, $\overline{D}^{16}$, $\overline{E}^{16}$ et $\overline{F}^{16}$ correspondent respectivement aux nombres 0, 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15 (en base 10).
- Or : $16=2^4$. Donc tous les nombres $\overline{0}^{16}$, $\overline{1}^{16}$, $\overline{2}^{16}$, $\overline{3}^{16}$, $\overline{4}^{16}$, $\overline{5}^{16}$, $\overline{6}^{16}$, $\overline{7}^{16}$, $\overline{8}^{16}$, $\overline{9}^{16}$, $\overline{A}^{16}$, $\overline{B}^{16}$, $\overline{C}^{16}$, $\overline{D}^{16}$, $\overline{E}^{16}$ et $\overline{F}^{16}$ s'écrivent sous la forme :

$$a_3\,2^3+a_2\,2^2+a_1\,2^1+a_0\,2^0$$

(car ils sont tous strictement inférieurs à 16 (en base 10)).
Leurs écritures en base 2 est donc de la forme $\overline{a_3\,a_2\,a_1\,a_0}^{2}$: elle contient exactement 4 chiffres, en ajoutant éventuellement des 0 à gauche (ce qui est fait dans le tableau de l'énoncé avec les chiffres 7 et 5 par exemple).

- Comme les écritures en base 2 de ces nombres contiennent exactement 4 chiffres et que $16 = 2^4$, on peut obtenir $\overline{p}^2$ à partir de $\overline{p}^{16}$ en concaténant les écritures en base 2 des chiffres de $\overline{p}^{16}$. Dans l'exemple de l'énoncé, pour déterminer l'écriture en base 2 du nombre $\overline{7D5}^{16}$:

  1) on écrit en base 2 chacun des chiffres de $\overline{7D5}^{16}$ en ajoutant des 0 à gauche pour atteindre une écriture en base 2 avec exactement 4 chiffres. C'est le tableau donné par l'énoncé :

Base 16	$\overline{7}^{16}$	$\overline{D}^{16}$	$\overline{5}^{16}$
Base 2	$\overline{0111}^2$	$\overline{1101}^2$	$\overline{0101}^2$

  2) On concatène ensuite ces écritures et on enlève les éventuels 0 à gauche.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \overline{7D5}^{16} = \overline{11111010101}^2.}$$

□

b) Écrire $\overline{A2C}^{16}$ en base 2.

Démonstration.

- D'après la question précédente, on commence par déterminer l'écriture en base 2 des nombres $\overline{A}^{16}$, $\overline{2}^{16}$ et $\overline{C}^{16}$.

  × Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \overline{A}^{16} &= 10 \\ &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= \overline{1010}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{1}^{16} = \overline{1010}^2}$$

  × Ensuite :

$$\begin{aligned} \overline{2}^{16} &= 2 \\ &= 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= \overline{10}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{2}^{16} = \overline{0010}^2}$$

  × Enfin :

$$\begin{aligned} \overline{C}^{16} &= 12 \\ &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= \overline{1100}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{C}^{16} = \overline{1100}^2}$$

- On obtient ensuite l'écriture en base 2 de $\overline{A2C}^{16}$ en concaténant les écritures en base 2 précédentes.

$$\boxed{\overline{A2C}^{16} = \overline{101000101100}^2}$$

□