Nombres complexes - Chapitre 5

I. Le plan complexe

I.1. Image d'un complexe - Affixe d'un point

Proposition 1.
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine (avec des points) euclidien (muni de mesure de distances et d'angles) orienté muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.
On peut identifier $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$.

Démonstration.
On note :

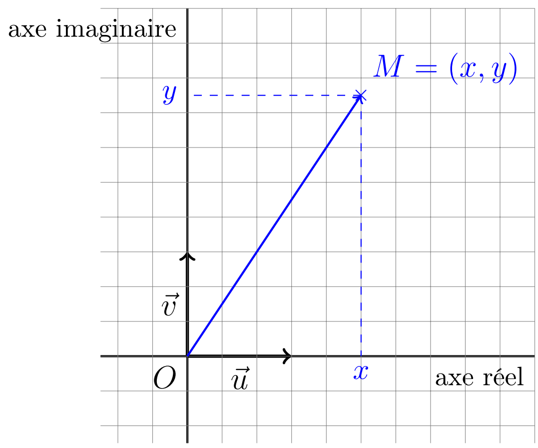
$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathbb{C} & \to & \mathcal{P} \\ & & z & \mapsto & O + \mathrm{Re}\,(z)\ \vec{u} + \mathrm{Im}\,(z)\ \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} \psi & : & \mathcal{P} & \to & \mathbb{C} \\ & & M = (x, y) & \mapsto & x + i\,y \end{array}$$

Les applications φ et ψ sont bijectives et : $\varphi = \psi^{-1}$. □

Commentaire

La bijection φ est aussi souvent définie de la façon suivante :

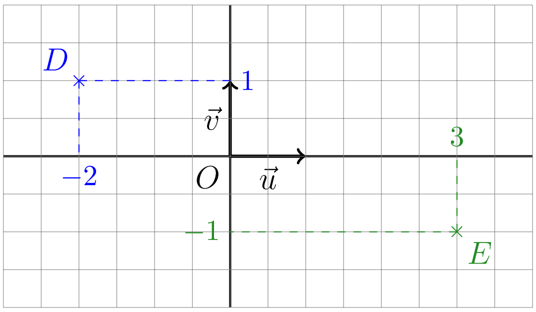
$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & z & \mapsto & M = \big(\mathrm{Re}\,(z)\,, \mathrm{Im}\,(z)\big) \end{array}$$



Définition (Image d'un complexe - Affixe d'un point)

- Soit $z \in \mathbb{C}$.
  Le point M de coordonnées $\big(\mathrm{Re}\,(z)\,, \mathrm{Im}\,(z)\big)$ est appelé *image de z*. On note : $M\,(z)$.
- Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  Le nombre complexe $z = x + i\,y$ est appelé *affixe de M*.
- L'axe des abscisses est appelé *axe des réels*, et l'axe des ordonnées *axe des imaginaires purs*.

Exemple



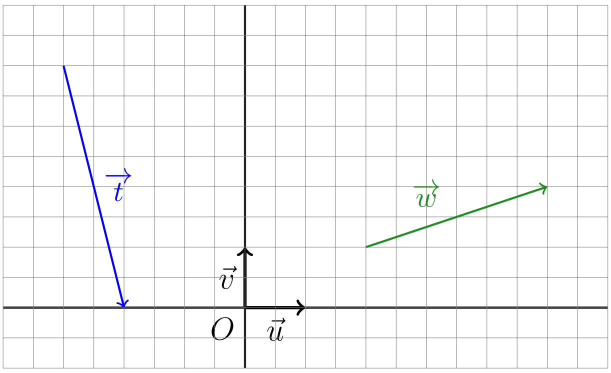
- Le point D a pour affixe $-2+i$.
- Le point image du nombre complexe $3-i$ est E.

I.2. Affixe d'un vecteur

Définition (Vecteur image - Affixe d'un vecteur)

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$.
  Le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe z.
- Soit un vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
  Le nombre complexe $z = x + i\,y$ est appelé *affixe* du vecteur $\vec{w}$.

Exemple



- Le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $3+i$.
- Le vecteur image du nombre complexe $1-4\,i$ est le vecteur $\vec{t}$.

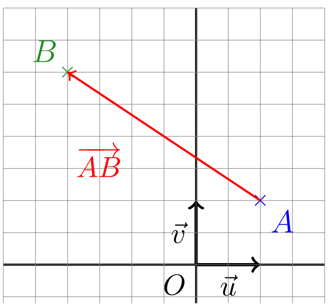
Proposition 2. (Liens entre affixe d'un point et affixe d'un vecteur)

- *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

$$\textit{le point } M \textit{ a pour affixe } z \quad \Leftrightarrow \quad \textit{le vecteur } \overrightarrow{OM} \textit{ a pour affixe } z$$

- *Soient A un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B.*
  Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Exemple



On note A le point d'affixe $z_A = 1+i$ et B le point d'affixe $z_B = -2+3\,i$.

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

$$z_B - z_A \;=\; (-2+3\,i) - (1+i) \;=\; -3+2\,i$$

I.3. Propriétés

Proposition 3.
Soit $\overrightarrow{w_1}$ *et* $\overrightarrow{w_2}$ *deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives* z_1 *et* z_2*.*

1) Le vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ *a pour affixe* $z_1 + z_2$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$*. Le vecteur* $\lambda \cdot \overrightarrow{w_1}$ *a pour affixe* $\lambda\, z_1$*.*

Démonstration.

1) Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.
Alors il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $z_1 = x_1 + i\, y_1$ et $z_2 = x_2 + i\, y_2$. De plus, par définition de l'affixe d'un vecteur :

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On obtient :

× d'une part :

$$z_1 + z_2 \;=\; (x_1 + i\, y_1) + (x_2 + i\, y_2) \;=\; (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

× d'autre part :

$$\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le nombre complexe $z_1 + z_2$ est bien l'affixe du vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$.

2) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{w_1}$ un vecteur du plan complexe d'affixe z_1.
Alors il existe $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z_1 = x_1 + i\, y_1$. De plus, par définition de l'affixe d'un vecteur :

$$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

× d'une part :

$$\lambda\, z_1 \;=\; \lambda\,(x_1 + i\, y_1) \;=\; (\lambda\, x_1) + i\,(\lambda\, y_1)$$

× d'autre part :

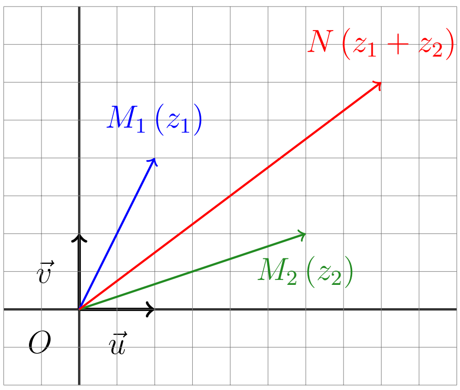
$$\lambda \cdot \overrightarrow{w_1} \;=\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, y_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le nombre complexe $\lambda\, z_1$ est bien l'affixe du vecteur $\lambda \cdot \overrightarrow{w_1}$.

□

Commentaire

La somme de nombres complexes peut donc s'interpréter géométriquement. En effet, soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on note $M_1\,(z_1)$ et $M_2\,(z_2)$.
Alors $z_1 + z_2$ est l'affixe du point N tel que : $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.



Exemple
Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 + 3\,i$.
Calculer l'affixe du vecteur $2 \cdot \overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$.

Démonstration.
On note z l'affixe du vecteur $2 \cdot \overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$. Alors :

$$z \;=\; 2\,z_1 - z_2 \;=\; 2\,(2-i) - (1+3\,i) \;=\; 3 - 5\,i$$

□

Proposition 4.
1) Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

$$\text{les points } A \text{ et } B \text{ sont confondus} \quad \Leftrightarrow \quad z_A = z_B$$

2) Soient $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{w_2} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2$$

Démonstration.
La démonstration de cette proposition est immédiate. Elle provient du caractère bijectif de l'application φ définie au début de ce chapitre. □

Proposition 5. (Interprétation géométrique du conjugué)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z.
Alors le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z.
Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. De plus, par définition de l'affixe d'un point :

$$M = (x, y)$$

On note M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisse. On obtient :

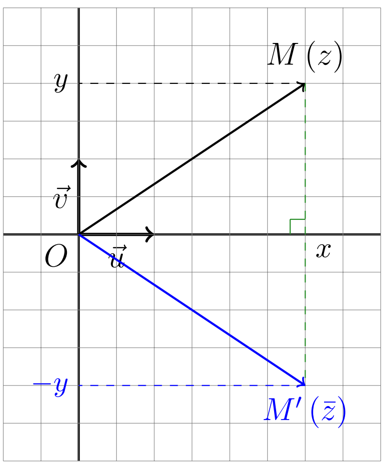
× d'une part, par définition de M' :

$$M' = (x, -y)$$

× d'autre part, par définition du conjugué :

$$\bar{z} \;=\; x - i\,y$$

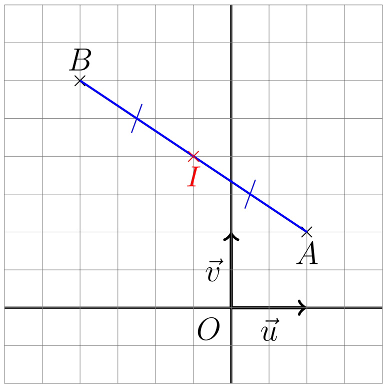
Ainsi, le nombre complexe $\bar{z}$ est bien l'affixe du point M'. □



Proposition 6. (Affixe du milieu d'un segment)
Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors le milieu I du segment $[A, B]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Exemple
On note A le point d'affixe $z_A = 1 + i$ et B le point d'affixe $z_B = -2 + 3\,i$. Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[A, B]$.

Démonstration.



On note z_I l'affixe du point I. Alors :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(1+i) + (-2+3\,i)}{2} = -\frac{1}{2} + 2\,i$$

$\square$

II. Module, arguments et formes trigonométriques d'un complexe

II.1. Module d'un nombre complexe

II.1.a) Définition et premières propriétés

Définition
Soit $z \in \mathbb{C}$.
On appelle *module de z* et on note $|z|$ le réel $\sqrt{z\bar{z}}$.

⚠ On n'utilisera **jamais** la notation « $\sqrt{\cdot}$ » dans $\mathbb{C}$.

Proposition 7.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. Alors : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

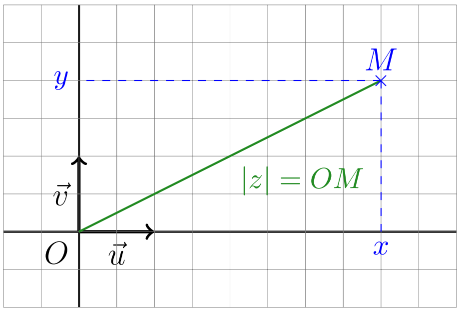
$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)\,(x-iy)} = \sqrt{x^2 - (iy)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\square$

Commentaire
On utilisera plutôt :
- la définition du module lorsqu'on manipule des produits de complexes,
- la proposition 7 lorsqu'on manipule des sommes de complexes.

Proposition 8. (Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point du plan complexe d'affixe z. Alors le module de z est la distance OM *:*

$$|z| \ = \ OM$$



II.1.b) Propriétés

Proposition 9. (Propriétés du module)

1) *Positivité :* $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant 0$.

2) *Définition : Soit* $z \in \mathbb{C}$.

$$|z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0$$

3) *Compatibilité avec le produit :* $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

   a) *En particulier :* $\forall z \in \mathbb{C},\ |-z| = |z|$.

   b) *Conséquence :* $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n$.

4) *Compatibilité avec l'inverse :* $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

5) *Compatibilité avec le quotient :* $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

6) $\forall z \in \mathbb{C},\ |\bar{z}| = |z|$

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$. D'après la proposition 7 :

$$|z| \ = \ \sqrt{x^2 + y^2} \ \geqslant \ 0$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Raisonnons par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons : $z = 0$. Alors :

$$|z| \ = \ \sqrt{z \times \bar{z}} \ = \ \sqrt{0 \times \bar{z}} \ = \ \sqrt{0} \ = \ 0$$

($\Rightarrow$) Supposons : $|z| = 0$.
On sait qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$. Alors :

comme $\quad |z| = 0$

alors $\quad \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

donc $\quad x^2 + y^2 = 0$

d'où $\quad x^2 = 0$ ET $y^2 = 0 \quad$ *(car $x^2 \geqslant 0$ et $y^2 \geqslant 0$)*

ainsi $\quad x = 0$ ET $y = 0$

On en déduit : $z = x + iy = 0 + i \times 0 = 0$.

3) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

- <u>Méthode 1</u> : en utilisant la définition du module.
  - $\times$ Tout d'abord :
  $$|z_1\, z_2|^2 \;=\; z_1\, z_2 \times \overline{z_1\, z_2} \;=\; z_1\, z_2\; \overline{z_1}\, \overline{z_2} \;=\; z_1\, \overline{z_1} \times z_2\, \overline{z_2} \;=\; |z_1|^2\, |z_2|^2 \;=\; (|z_1|\, |z_2|)^2$$
  - $\times$ Or un module est positif, donc : $|z_1\, z_2| \in \mathbb{R}_+$ et $|z_1|\, |z_2| \in \mathbb{R}_+$.
  De plus la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :
  $$|z_1\, z_2| \;=\; |z_1|\, |z_2|$$
- <u>Méthode 2</u> : en utilisant la forme algébrique.
  Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :
  $$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$
  - $\times$ D'une part :
  $$z_1 z_2 \;=\; (x_1 + iy_1)\, (x_2 + iy_2) \;=\; x_1\, x_2 + i\, x_1\, y_2 + i\, x_2\, y_1 + i^2\, y_1\, y_2 \;=\; (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i\, (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} |z_1\, z_2|^2 &= \big|(x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i\, (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\big| \\ &= (x_1\, x_2 - y_1\, y_2)^2 + (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)^2 \\ &= (x_1\, x_2)^2 - \cancel{2\, x_1\, x_2\, y_1\, y_2} + (y_1\, y_2)^2 + (x_1\, y_2)^2 + \cancel{2\, x_1\, y_2\, x_2\, y_1} + (x_2\, y_1)^2 \\ &= x_1^2\, x_2^2 + y_1^2\, y_2^2 + x_1^2\, y_2^2 + x_2^2\, y_1^2 \end{aligned}$$
  - $\times$ D'autre part :
  $$\begin{aligned} |z_1|^2\, |z_2|^2 &= |x_1 + iy_1|^2\, |x_2 + iy_2|^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2)\, (x_2^2 + y_2^2) \\ &= x_1^2\, x_2^2 + x_1^2\, y_2^2 + y_1^2\, x_2^2 + y_1^2\, y_2^2 \end{aligned}$$
  - $\times$ Finalement : $|z_1\, z_2|^2 = |z_1|^2\, |z_2|^2$.
  Or un module est positif, donc : $|z_1\, z_2| \in \mathbb{R}_+$ et $|z_1|\, |z_2| \in \mathbb{R}_+$.
  De plus la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :
  $$|z_1\, z_2| \;=\; |z_1|\, |z_2|$$

4) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 \;=\; \frac{1}{z}\, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \;=\; \frac{1}{z}\, \frac{1}{\overline{z}} \;=\; \frac{1}{z\, \overline{z}} \;=\; \frac{1}{|z|^2}$$
Or un module est positif, donc : $\left|\dfrac{1}{z}\right| \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{|z|} \geqslant 0$.
De plus la fonction $x \mapsto x^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :
$$\left|\frac{1}{z}\right| \;=\; \sqrt{\frac{1}{|z|^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{|z|^2}} \;=\; \frac{1}{|z|} \qquad \textit{(car } |z| \geqslant 0\textit{)}$$

5) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right| \\
&= |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right| && \textit{(par compatibilité du module avec le produit)} \\
&= |z_1 \times \frac{1}{|z_2|} && \textit{(par compatibilité du module avec l'inverse)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}
\end{aligned}$$

6) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$. Alors : $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$. D'où :

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

□

Proposition 10. (Inégalité triangulaire)
Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.
1) *On a :*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

avec égalité **si et seulement si** *:*

$$(z_1 = 0 \texttt{ OU } z_2 = 0) \texttt{ OU } (\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z_2 = \alpha\, z_1)$$

2) *De plus :*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$$

Lemme 1.
a) $\forall u \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\,(u) \leqslant |u|$
b) $\forall u \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(u) = |u| \Leftrightarrow u \in \mathbb{R}_+$

Démonstration. **(Lemme 1)**
a) Soit $u \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $u = a + i\,b$.

- Tout d'abord : $\mathrm{Re}\,(u) = a \leqslant |a|$
- Ensuite : $|a| = \sqrt{a^2}$. Or :

$$\begin{aligned}
& a^2 \leqslant a^2 + b^2 && \textit{(car } b^2 \geqslant 0\textit{)} \\
\text{donc} \quad & \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} && \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
\text{d'où} \quad & |a| \leqslant |b|
\end{aligned}$$

- Ainsi, par transitivité :

$$\mathrm{Re}\,(u) \leqslant |a| \leqslant |u|$$

b) Soit $u \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $u = a + ib$. Raisonnons par double implication :
($\Leftarrow$) Supposons $u \in \mathbb{R}_+$. Alors : $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}_+$. D'où :

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = a \qquad \textit{(car } a \geqslant 0\textit{)}$$

Ainsi : $|u| = \mathrm{Re}\,(u)$.

$(\Rightarrow)$ Supposons : $\mathrm{Re}\,(u) = |u|$. Alors :

× $a = |u| \geqslant 0$. Ainsi : $a \in \mathbb{R}_+$.

× De plus :

$$\begin{array}{rrcl} & a & = & \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{donc} & a^2 & = & a^2+b^2 \\ \text{d'où} & 0 & = & b^2 \\ \text{ainsi} & 0 & = & b \end{array}$$

Finalement, on obtient : $u = a + 0 = a$. Or $a \in \mathbb{R}_+$. On en déduit : $u \in \mathbb{R}_+$.

□

Démonstration. **(Proposition 10)**

1) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Deux cas se présentent :

- si $z_1 = 0$, alors l'inégalité est évidente.
- si $z_1 \neq 0$, on pose : $u = \dfrac{z_2}{z_1}$.

× Alors :

$$\begin{array}{rcll} |z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| & \Leftrightarrow & \dfrac{|z_1+z_2|}{|z_1|} \leqslant 1 + \dfrac{|z_2|}{|z_1|} & \\ & \Leftrightarrow & \left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1}\right| \leqslant 1 + \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| & \textit{(par compatibilité du module avec le quotient)} \\ & \Leftrightarrow & |1+u| \leqslant 1 + |u| & \\ & \Leftrightarrow & |1+u|^2 \leqslant (1+|u|)^2 & \textit{(par stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & (1+u)\,\overline{(1+u)} \leqslant 1 + 2\,|u| + |u|^2 & \\ & \Leftrightarrow & (1+u)\,(1+\bar{u}) \leqslant 1 + 2\,|u| + |u|^2 & \textit{(par linéarité de la conjugaison)} \\ & \Leftrightarrow & \cancel{1} + u + \bar{u} + \cancel{u\bar{u}} \leqslant \cancel{1} + 2\,|u| + \cancel{u\bar{u}} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{u+\bar{u}}{2} \leqslant |u| & \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}\,(u) \leqslant |u| & \end{array}$$

× Or, cette dernière inégalité est vraie d'après le point ***a)*** du Lemme 1.
Par équivalence, on en déduit que la première inégalité est vraie. On ainsi démontré la première inégalité triangulaire :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

- Démontrons maintenant le cas d'égalité.
Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Deux cas se présentent :

× si $z_1 = 0$, alors l'égalité est vérifiée.

× si $z_1 \neq 0$, alors, avec le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\,(u) = |u| \;\Leftrightarrow\; u \in \mathbb{R}_+$$

où la dernière équivalence est obtenue avec le point ***b)*** du Lemme 1.
Ainsi, si $z_1 \neq 0$, l'égalité a lieu **si et seulement si** $\dfrac{z_2}{z_1} = u \in \mathbb{R}_+$, *i.e.* $z_2 = u\,z_1$.

2) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. On rappelle qu'on a démontré la première inégalité triangulaire :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, \quad |u+v| \ \leqslant \ |u| + |v| \qquad (*)$$

- Tout d'abord :

$$\big| |z_1| - |z_2| \big| \ \leqslant \ |z_1 - z_2| \ \Leftrightarrow \ -|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$$

- On applique l'inégalité $(*)$ à $u = z_1 - z_2$ et $v = z_2$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \big|(z_1 - z_2) + z_2\big| & \leqslant & |z_1 - z_2| + |z_2| \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ |z_1| & & |z_1 - z_2| + |z_2| \end{array}$$

Ainsi : $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$.

- On applique l'inégalité $(*)$ à $u = z_1 - z_2$ et $v = -z_1$. On obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \big|(z_1 - z_2) + (-z_1)\big| & \leqslant & |z_1 - z_2| + |-z_1| & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ |z_2| & = & |-z_2| & & |z_1 - z_2| + |-z_1| & = & |z_1 - z_2| + |z_1| \end{array}$$

Ainsi : $-|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2|$.

- Finalement :

$$-|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$$

D'où :

$$\big| |z_1| - |z_2| \big| \ \leqslant \ |z_1 - z_2|$$

$\square$

Commentaire

- On a utilisé dans cette preuve la propriété classique suivante.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$|x| \leqslant a \ \Leftrightarrow \ -a \leqslant x \leqslant a$$

- On peut déduire de l'inégalité triangulaire la proposition suivante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors :

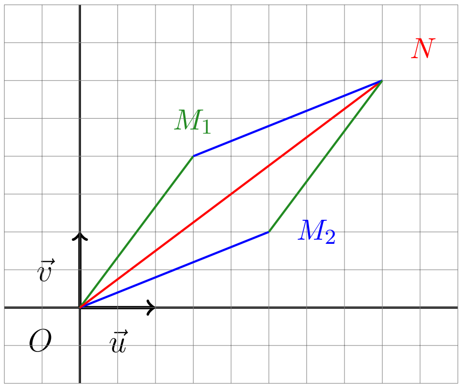
$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

(on démontre ce résultat par récurrence sur n)

Commentaire

L'inégalité triangulaire s'interprète conformément à son nom. Les cas d'égalité sont apparents. On note $M_1\,(z_1)$, $M_2\,(z_2)$ et $N\,(z_1+z_2)$. L'inégalité triangulaire s'énonce géométriquement de la façon suivante :

$$ON \ \leqslant\ OM_1 + OM_2$$



II.1.c) Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition (Ensemble $\mathbb{U}$)
L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{U} \ = \ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Proposition 11.

1) $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$

2) $\mathbb{U} \neq \varnothing$

3) *$\mathbb{U}$ est stable par $\times$:*

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, \quad z\,z' \in \mathbb{U}$$

4) *$\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse : pour tout $z \in \mathbb{U}$, z^{-1} existe et $z^{-1} \in \mathbb{U}$.*

Commentaire

On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors : $|z| = 1$. Donc $z \neq 0$. Ainsi : $z \in \mathbb{C}^*$.
On en déduit : $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$.

2) On remarque : $1 \in \mathbb{U}$. D'où : $\mathbb{U} \neq \varnothing$.

3) Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$.

$$\begin{aligned} |z\,z'| &= |z|\,|z'| && \textit{(par compatibilité du module avec le produit)} \\ &= 1 \times 1 && \textit{(car } (z,z') \in \mathbb{U}^2\textit{)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit : $z\,z' \in \mathbb{U}$.

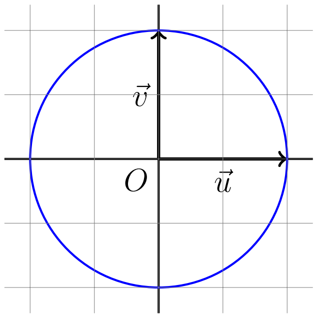
4) Soit $z \in \mathbb{U}$. Comme $z \neq 0$, alors z^{-1} existe. De plus :

$$\begin{aligned}
|z^{-1}| &= \left|\frac{1}{z}\right| \\
&= \frac{1}{|z|} && \textit{(par compatibilité du module avec l'inverse)} \\
&= \frac{1}{1} && \textit{(car } z \in \mathbb{U}\textit{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où : $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

□

Proposition 12. (Interprétation géométrique de l'ensemble $\mathbb{U}$)
Dans le plan complexe, l'image de l'ensemble $\mathbb{U}$ est le cercle de centre l'origine O et de rayon 1.



II.2. Arguments d'un nombre complexe et écriture trigonométrique

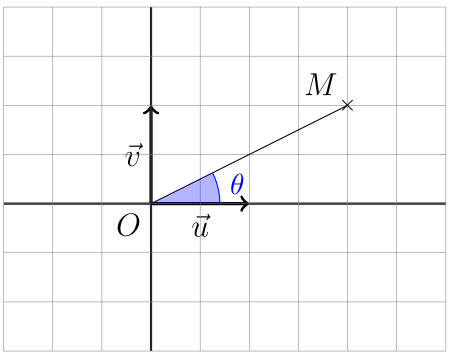
II.2.a) Définition et premières propriétés

Définition (Angle orienté)
Soit M un point du plan complexe distinct de O.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ définissent un angle orienté noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.

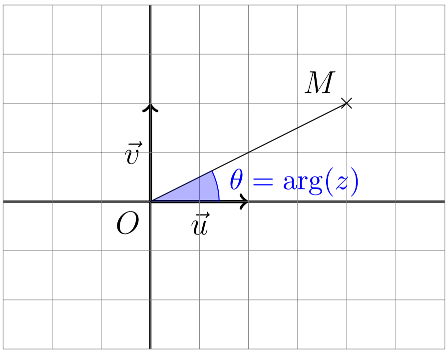
Proposition 13.
Soit M un point du plan complexe distinct de O.
L'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ a une infinité de mesures.
Notons θ l'une d'entre elles. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel $\theta + 2\,k\,\pi$ est aussi une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$. On notera :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta \ [2\pi]$$

(cela se lit : « l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ est congru à θ modulo $2\,\pi$)



Définition (Argument d'un nombre complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note M son image dans le plan complexe.
On appelle *argument de z*, et on note $\arg(z)$ toute mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



Proposition 14.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- *Le nombre complexe z admet une infinité d'argument.*
  Plus précisément, si le réel θ est un argument de z, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2\,k\,\pi$ est un argument de z. On notera :
$$\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$$
- *La mesure d'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelée* argument principal de z.

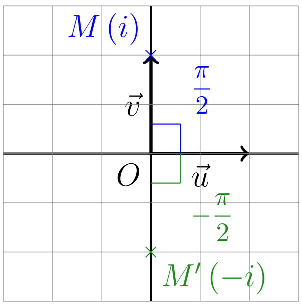
⚠ L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, on parle d'`UN` argument d'un nombre complexe. Prenons par exemple le nombre complexe : $z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Alors un argument de z est $\frac{\pi}{3}$, mais aussi $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $\frac{\pi}{3} - 4\pi$, etc.

⚠ Le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument !

Exemple Donner un argument des nombres complexes i et $-i$.

Démonstration.

- Notons $z = i$ et M le point d'affixe z. Alors : $M = (0, 1)$. On en déduit : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ainsi :
$$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
- Notons $z' = i$ et M' le point d'affixe z'. Alors : $M' = (0, -1)$. On en déduit : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ainsi :
$$\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$



□

Proposition 15.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. On note θ un argument de z. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \qquad \textit{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. On note M le point d'affixe z et θ un argument de z.

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\left((\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\right) \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \times |z| \times \cos(\theta) && \textit{(par définition du module et d'un argument de } z\textit{)} \\ &= 1 \times |z| \cos(\theta) && \textit{(car } (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \textit{ est un repère (ortho)normé)} \end{aligned}$$

  Par ailleurs :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Ainsi, par propriété du produit scalaire :

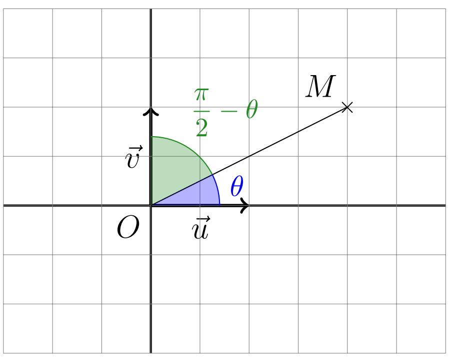
$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM} > = 1 \times x + 0 \times y = x$$

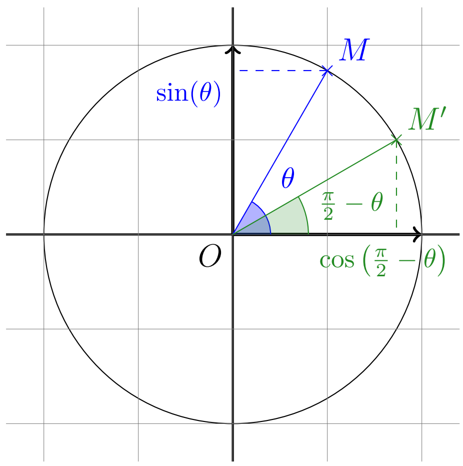
  On en déduit : $x = |z| \cos(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$$

- Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > &= \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos\left((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\right) \\ &= 1 \times |z| \times \cos\left((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM})\right) && \textit{(mêmes arguments que le point précédent)} \\ &= |z| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= |z| \sin(\theta) \end{aligned}$$





Par ailleurs :

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi, par propriété du produit scalaire :

$$< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{OM} > \; = \; 0 \times x + 1 \times y \; = \; y$$

On en déduit : $y = |z| \sin(\theta)$. Or, comme $z \neq 0$, alors : $|z| \neq 0$. D'où :

$$\sin(\theta) \; = \; \frac{y}{|z|}$$

□

Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + i$.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z' = -1 + \sqrt{3}$.

Démonstration.

1. Commençons par déterminer le module de z.

$$|z| \; = \; \sqrt{1^2 + 1^2} \; = \; \sqrt{2}$$

On note θ un argument de z. On obtient alors :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit : $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} \; [2\pi]$.

Remarquons : $z = \sqrt{2} \; \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2. Commençons par déterminer le module de z'.

$$|z'| \; = \; \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \; = \; \sqrt{4} \; = \; 2$$

On note θ' un argument de z'. On obtient alors :

$$\cos(\theta') = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta') = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit : $\arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3} \; [2\pi]$.

Remarquons : $z = 2 \; \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

□

Proposition 16.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1) *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

$$\arg(\lambda\, z) = \begin{cases} \arg(z)\ [2\pi] & \textit{si } \lambda > 0 \\ \arg(z) + \pi\ [2\pi] & \textit{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

En particulier : $\arg(-z) \ = \ \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

2) $\arg(\bar{z}) \ = \ -\arg(z)\ [2\pi]$

3) $z \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\arg(z) \equiv 0\ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$

Plus précisément :

$$z \in \mathbb{R}_+^* \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$$

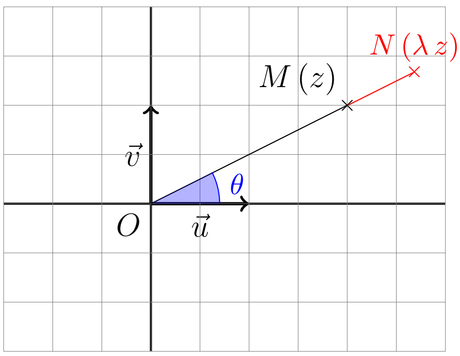
4) $z \in i\,\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\right) \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note M l'image de z.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note N l'image de $\lambda\, z$. Deux cas se présentent :

× si $\lambda > 0$, alors : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$. On en déduit :

$$\arg(\lambda\, z) \ \equiv \ \arg(z)\ [2\pi]$$

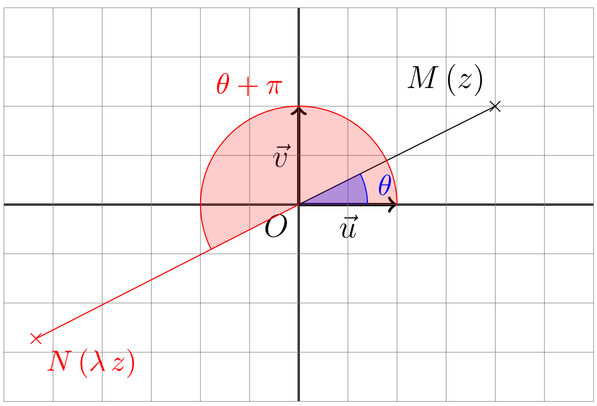


× si $\lambda < 0$, on note N' l'image de $|\lambda|\, z$. Alors N' est le symétrique de N par rapport à O. D'où :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) \ &\equiv \ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON'}) + \pi\ [2\pi] \\ &\equiv \ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) + \pi\ [2\pi] \qquad \textit{(d'après le point précédent)} \end{aligned}$$

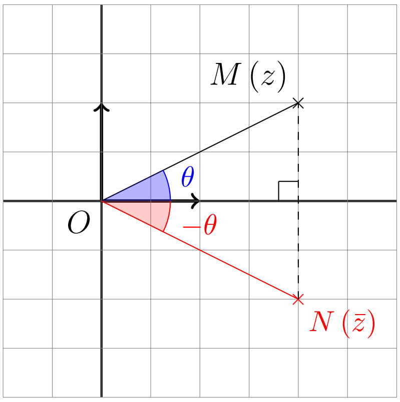
On en déduit :

$$\arg(\lambda\, z) \ \equiv \ \arg(z) + \pi\ [2\pi]$$



2) On note M' l'image de $\bar{z}$. Alors M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. On en déduit : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$. Ainsi :

$$\arg(\bar{z}) \ \equiv\ -\arg(z)\ [2\pi]$$



3) Comme $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\, y$. On note θ un argument de z.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R}^* \quad &\Leftrightarrow \quad y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \equiv 0\ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \theta \equiv \pi\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \equiv 0\ [\pi] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$z \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\arg(z) \equiv 0\ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$$

4) On raisonne comme dans le point précédent :

$$\begin{aligned} z \in i\,\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$z \in i\,\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \texttt{OU} \quad \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

□

II.2.b) Écriture trigonométrique d'un nombre complexe

Définition (Écriture trigonométrique d'un nombre complexe)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de module r et d'argument θ.
Une écriture (ou forme) trigonométrique de z est :

$$z \;=\; r\left(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\right)$$

> Un nombre complexe admet une infinité d'écritures trigonométriques, puisqu'il admet une infinité d'arguments. On parle donc d'`UNE` écriture trigonométrique d'un nombre complexe.

Exercice 2
Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe $z = -\sqrt{3} - i$.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $|z|$.

$$|z| \;=\; \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \;=\; \sqrt{4} \;=\; 2$$

- On note θ un argument de z. Alors :

$$\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = -\frac{1}{2}$$

  On en déduit : $\arg(z) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Finalement :

$$z \;=\; 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

□

Proposition 17.
Soient $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$.

$$z_1 = z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lcl} |z_1| & = & |z_2| \\ \arg(z_1) & \equiv & \arg(z_2)\ [2\pi] \end{array}\right.$$

II.2.c) Formules trigonométriques

Proposition 18.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \;=\; 1$$

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$.
De plus :

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = x \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|} = y$$

On en déduit :

$$1 \;=\; |z|^2 \;=\; x^2 + y^2 \;=\; \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)$$

□

Proposition 19. (Formules d'addition)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) $\cos(a-b) \ = \ \cos(a)\,\cos(b) \ + \ \sin(a)\,\sin(b)$

2) $\cos(a+b) \ = \ \cos(a)\,\cos(b) \ - \ \sin(a)\,\sin(b)$

3) $\sin(a-b) \ = \ \sin(a)\,\cos(b) \ - \ \sin(b)\,\cos(a)$

4) $\sin(a+b) \ = \ \sin(a)\,\cos(b) \ + \ \sin(b)\,\cos(a)$

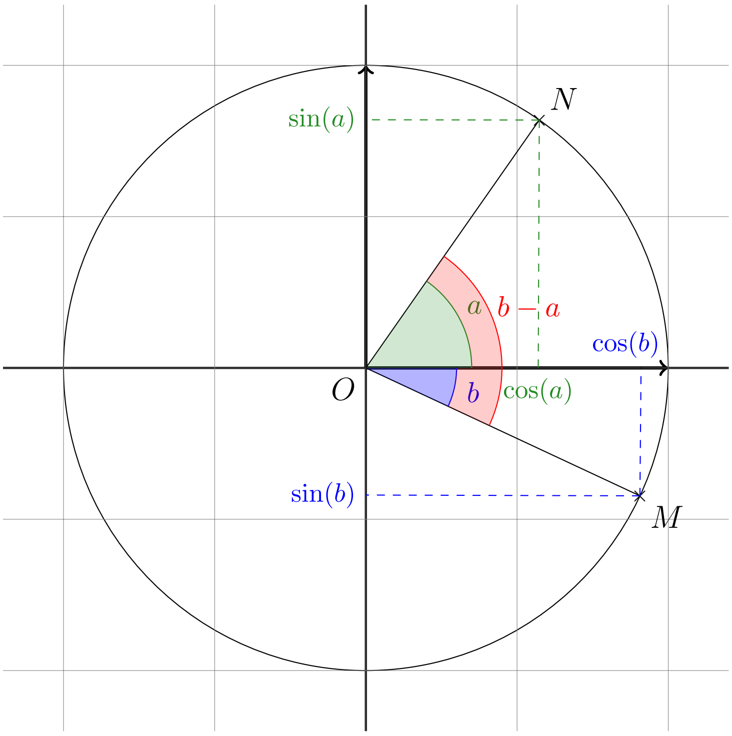
Démonstration.

1) On considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = \cos(b) + i\,\sin(b)$ et $z_N = \cos(a) + i\,\sin(a)$.

- Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition précédente :

$$|z_M| \ = \ |z_N| \ = \ 1$$

  Ainsi, $(z_M, z_N) \in \mathbb{U}^2$. On en déduit que M et N sont situés sur le cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1). On obtient la configuration suivante :



- Notons de plus :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \ &\equiv \ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi] \\ &\equiv \ a - b \quad [2\pi]\end{aligned}$$

  On obtient alors :

  × d'une part :

$$\begin{aligned}< \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} > \ &= \ \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\overrightarrow{ON}\| \times \cos\left((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})\right) \\ &= \ 1 \times 1 \times \cos\left((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})\right) \qquad \textit{(car } (z_M, z_N) \in \mathbb{U}^2\textit{)} \\ &= \ \cos(a-b)\end{aligned}$$

× d'autre part, par définition de l'affixe d'un vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$< \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} > = \cos(b)\ \cos(a) + \sin(b)\ \sin(a)$$

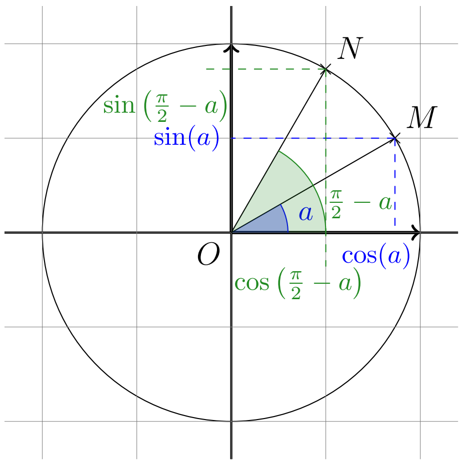
On en déduit bien : $\cos(a - b) = \cos(a)\ \cos(b) + \sin(a)\ \sin(b)$.

2) On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos\big(a - (-b)\big) \\ &= \cos(a)\ \cos(-b) + \sin(a)\ \sin(-b) \\ &= \cos(a)\ \cos(b) + \sin(a)\ \big(-\sin(b)\big) && \textit{(car } \cos \textit{ est paire et } \sin \textit{ est impaire)} \\ &= \cos(a)\ \cos(b) - \sin(a)\ \sin(b) \end{aligned}$$

3) On utilise la formule *2)* :

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\ \cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\ \sin(b) \\ &= \sin(a)\ \cos(b) - \cos(a)\ \sin(b) \end{aligned}$$



4) On utilise la formule *3)* :

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin\big(a - (-b)\big) \\ &= \sin(a)\ \cos(-b) - \sin(-b)\ \cos(a) \\ &= \sin(a)\ \cos(b) + \sin(b)\ \cos(a) && \textit{(car } \cos \textit{ est paire et } \sin \textit{ est impaire)} \end{aligned}$$

□

Exercice 3
Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide d'une formule d'addition.

Démonstration.
On remarque :

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\,\pi - 3\,\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\,(1+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

□

Proposition 20. (Formules de duplication)
Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos(2\,a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2\,a) &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

Démonstration.
Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \cos(2\,a) &= \cos(a+a) \\ &= \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) && \textit{(par formule de duplication)} \\ &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= \cos^2(a) - \big(1-\cos^2(a)\big) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ &= 2\big(1-\sin^2(a)\big) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \sin(2\,a) &= \sin(a+a) \\ &= \sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a) \\ &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

□

Exercice 4
Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide d'une formule de duplication.

Démonstration.
On remarque :

$$\frac{\pi}{6} = 2\,\frac{\pi}{12}$$

Or :

× d'une part :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\times$ d'autre part :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(2\,\frac{\pi}{12}\right) \\ &= 2\,\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$2\,\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, on obtient finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$\square$

II.2.d) Propriétés des arguments

Proposition 21. (Propriétés des arguments)
Soit $(z, z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^3$.

1) $\arg(z_1\, z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$

2) $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

3) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$

Démonstration.

1) Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$. Alors il existe $(r_1, r_2) \in\,]0, +\infty[^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$z_1 = r_1\left(\cos(\theta_1) + i\,\sin(\theta_1)\right) \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2\left(\cos(\theta_2) + i\,\sin(\theta_2)\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 &= \Big(r_1\left(\cos(\theta_1) + i\,\sin(\theta_1)\right)\Big)\Big(r_2\left(\cos(\theta_2) + i\,\sin(\theta_2)\right)\Big) \\ &= r_1\, r_2\big(\cos(\theta_1)\,\cos(\theta_2) + i\,\cos(\theta_1)\,\sin(\theta_2) + i\,\sin(\theta_1)\,\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\,\sin(\theta_2)\big) \\ &= r_1\, r_2\Big(\left(\cos(\theta_1)\,\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\,\sin(\theta_2)\right) + i\left(\sin(\theta_1)\,\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\,\cos(\theta_1)\right)\Big) \\ &= r_1\, r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \end{aligned}$$

L'écriture ci-dessus est donc une forme trigonométrique du complexe $z_1\, z_2$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \arg(z_1\, z_2) &\equiv \theta_1+\theta_2 && [2\pi] \\ &\equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) && [2\pi] \end{aligned}$$

(notons que l'on retrouve bien : $|z_1\, z_2| = r_1\, r_2 = |z_1|\,|z_2|$*)*

2) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- D'une part :

$$\arg\left(\frac{z}{z}\right) = \arg(1) \equiv 0\ [2\pi] \qquad \textit{(car } 1 \in \mathbb{R}_+^* \textit{)}$$

- D'autre part, d'après le point précédent :

$$\arg\left(\frac{z}{z}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) \equiv \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)\ [2\pi]$$

Ainsi, par transitivité des congruences : $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 0\ [2\pi]$. D'où :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$$

3) Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$.

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg\left(z_1 \times \frac{1}{z_2}\right) \\
&\equiv \arg(z_1) + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) \quad [2\pi] \qquad \textit{(d'après } \textbf{1)}\textit{)} \\
&\equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi] \qquad \textit{(d'après } \textbf{2)}\textit{)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 22.

1) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^n$, $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n} z_i\right) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \arg(z_i)\ [2\pi]$

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$.

- **Initialisation** :
  - × d'une part : $\arg(z^0) = \arg(1) \equiv 0\ [2\pi]$ (car $1 \in \mathbb{R}_+^*$)
  - × d'autre part : $0 \times \arg(z) = 0$

  Ainsi : $\arg(z^0) \equiv 0 \times \arg(z)\ [2\pi]$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\arg(z^{n+1}) \equiv (n+1) \arg(z)\ [2\pi]$)

$$\begin{aligned}
\arg(z^{n+1}) &= \arg(z \times z^n) \\
&\equiv \arg(z) + \arg(z^n) \quad [2\pi] \qquad \textit{(d'après la proposition précédente)} \\
&\equiv \arg(z) + n \arg(z) \quad [2\pi] \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\equiv (n+1) \arg(z) \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$.

2) Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$

où $\quad \mathcal{P}(n) : \forall (z_1, \dots, z_n) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^n$, $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n} z_i\right) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \arg(z_i)\ [2\pi]$.

- ▶ **Initialisation** : soit $z_1 \in \mathbb{C}^*$.
  - D'une part : $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{1} z_i\right) = \arg(z_1)$
  - D'autre part : $\sum\limits_{i=1}^{1} \arg(z_i) = \arg(z_1)$

  Ainsi : $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{1} z_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{1} \arg(z_i)$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{n+1}$, $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n+1} z_i\right) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n+1} \arg(z_i)\ [2\pi]$)

  Soit $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^{n+1}$.

$$\begin{array}{rcll}
\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n+1} z_i\right) & = & \arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n} z_i \times z_{n+1}\right) & \\
& \equiv & \arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n} z_i\right) + \arg(z_{n+1}) \quad [2\pi] & \textit{(d'après la proposition précédente)} \\
& \equiv & \sum\limits_{i=1}^{n} \arg(z_i) + \arg(z_{n+1}) \quad [2\pi] & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& \equiv & \sum\limits_{i=1}^{n+1} \arg(z_i) \quad [2\pi] &
\end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^n$, $\arg\left(\prod\limits_{i=1}^{n} z_i\right) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \arg(z_i)\ [2\pi]$.

□

Exercice 5
On considère les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = -4\,i$.
Déterminer une écriture trigonométrique des nombres complexes :

1. $z_1\, z_2$ ***2.*** z_1^{2020}

Démonstration.
Commençons par déterminer une écriture trigonométrique de z_1 et z_2.

- Déterminons d'abord $|z_1|$.

$$|z_1| \ = \ \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} \ = \ \sqrt{4} \ = \ 2$$

  Ainsi :

$$z_1 \ = \ 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right) \ = \ 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\, \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

  D'où : $\arg(z_1) = \dfrac{5\pi}{6}$.

- Déterminons $|z_2|$.

$$|z_2| \ = \ |-4\,i| \ = \ |-4|\,|i| \ = \ 4 \times 1 \ = \ 4$$

Ainsi :

$$z_2 \ = \ 4\big(0 + (-1)\,i\big) \ = \ 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

D'où : $\arg(z_2) = -\dfrac{\pi}{2}$.

1. Tout d'abord :

$$|z_1\,z_2| \ = \ |z_1|\,|z_2| \ = \ 2 \times 4 \ = \ 8$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\arg(z_1\,z_2) \ &\equiv \ \arg(z_1) + \arg(z_2) && [2\pi] \\
&\equiv \ \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} && [2\pi] \\
&\equiv \ \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} && [2\pi] \\
&\equiv \ \frac{2\pi}{6} && [2\pi]
\end{aligned}$$

Finalement : $z_1\,z_2 = 8\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. Tout d'abord :

$$|z_1^{2020}| \ = \ |z_1|^{2020} \ = \ 2^{2020}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\arg\left(z_1^{2020}\right) \ &\equiv \ 2020\,\arg(z_1) && [2\pi] \\
&\equiv \ 2020\,\frac{5\pi}{6} && [2\pi] \\
&\equiv \ \frac{5050\,\pi}{3} && [2\pi] \\
&\equiv \ \frac{(841 \times 3 \times 2 + 4)\,\pi}{3} && [2\pi] \\
&\equiv \ \frac{4\pi}{3} + 841 \times 2\pi && [2\pi] \\
&\equiv \ \frac{4\pi}{3} && [2\pi]
\end{aligned}$$

Finalement : $z_1^{2020} = 2^{2020}\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$.

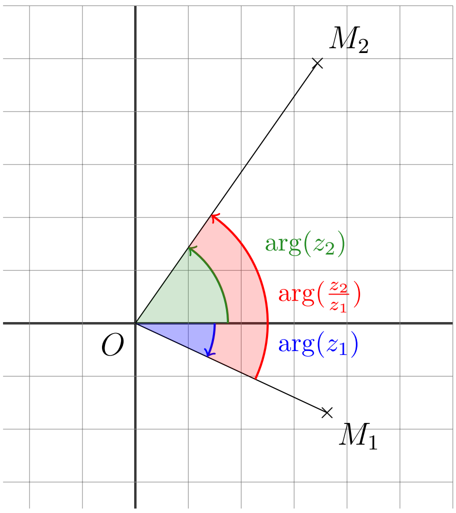
□

II.2.e) Interprétations géométriques

- Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$. On note M_1 l'image de z_1 et M_2 l'image de z_2.
  - Le réel $\arg(z_1)$ est, par définition d'un argument, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1})$.
    De même : $\arg(z_2) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_2})\ [2\pi]$.
  - Ainsi :

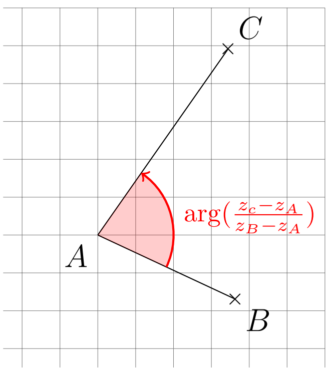
$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) &\equiv \arg(z_2) - \arg(z_1) && [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_2}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}) && [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) && [2\pi] \end{aligned}$$

Le réel $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ est donc une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$.



Proposition 23.
Soit $(z_1, z_2) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^2$. On note M_1 l'image de z_1 et M_2 l'image de z_2.
Le réel $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$.

- Soient A, B et C trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
  - Dans ce cas, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_C - z_A$.
    D'après le point précédent, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.
  - On est par exemple dans la situation suivante :



Proposition 24.
Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors :

$$A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi]$$

Commentaire

Rappelons qu'on a toutes les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A,\ B \text{ et } C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ z_c - z_A = \lambda\,(z_B - z_A)\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda\\
&\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi]
\end{aligned}$$

Proposition 25.
Soient A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors :

$$\text{L'angle } \widehat{CAB} \text{ est droit} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$